NAT 5084

HARVARD UNIVERSITY.

LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.

123

Exchange.

September 2, 1901 — May 26, 1902.

OCT 1901

123

Mitteilungen

der

Naturforschenden Gesellschaft

in Bern

aus dem Jahre 1900.

Nr. 1478-1499.

Redaktion: J. H. GRAF.

BERN
Druck und Verlag von K. J. Wyss
1901

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

BIBLIOGRAPHIE
der
Schweizerischen Landeskunde.

Unter Mitwirkung
der
hohen Bundesbehörden, eidgen. und kant. Amtsstellen
und zahlreicher Gelehrter
herausgegeben von der
Centralkommission für schweizerische Landeskunde.

In deutscher und französischer Ausgabe.

Bis jetzt erschienen :

Fascikel Ia: *Bibliographische Vorarbeiten der landeskundlichen Litteratur und Kataloge der Bibliotheken der Schweiz.* Zusammengestellt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1894. 69 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel I b, enthaltend: *Bibliographie der Gesellschaftsschriften, Zeitungen und Kalender der Schweiz,* von Prof. J. L. Brandstetter in Luzern. 380 Seiten. Preis Fr. 3.—

Fascikel II a: *Landesvermessung und Karten der Schweiz, ihrer Landstriche und Kantone.* Herausgegeben vom eidgen. topographischen Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1892. 193 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II b: *Karten kleinerer Gebiete der Schweiz.* Herausgegeben vom eidg. topograph. Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf, Bern 1892. 164 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II c: *Stadt- und Ortschaftspläne, Reliefs und Panoramen der Schweiz.* Herausgegeben vom eidg. topograph. Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1893. 173 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II d, enthaltend: *Generalregister, Ergänzungen und Nachträge zu den Fascikeln II a—c* (Landesvermessung, Kataloge der Kartensammlungen, Karten, Reliefs und Panoramen). Im Auftrage des eidgen. topograph. Büreaus redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. 220 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel III: *Landes- und Reisebeschreibungen.* Ein Beitrag zur Bibliographie der schweizer. Reiselitteratur, 1479—1890. Zusammengestellt von A. Wäber, Bern. 462 Seiten 8°. Preis Fr. 4.—

Fascikel IV 3: *Balneologie und Climatotherapie.* Versuch einer schweiz. Bibliographie der Litteratur auf den Gebieten des Badewesens, der Heilquellen, der climaterischen Kurorte u. s. w. Von B. Reber in Genf. 130 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel IV 6: *Die Fauna der italienischen Schweiz.* Redigirt von Prof. Dr. A. Lenticchia. Como 1894. 19 Seiten 8°. Preis 50 Cts.

Fascikel IV 6: *Fauna helvetica:* Heft 2: Seenfauna. Zusammengestellt von Prof. D. F. Zschokke. Bern 1897. 30 Seiten. 60 Cts.

Fascikel IV6: *Fauna helvetica.* Heft 3: Säugethiere. Zusammengestellt von Dr. H. Fischer-Sigwart. Bern 1900. 119 Seiten. Fr. 2.—

Fascikel IV 6: *Fauna helvetica.* Heft 4: Vögel. Zusammengestellt von Prof. Dr. Theophil Studer. Bern 1895. 57 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

(Fortsetzung auf Seite 3 des Umschlags.)

Mitteilungen

der

Naturforschenden Gesellschaft

in Bern

aus dem Jahre 1900.

Nr. 1478-1499.

Redaktion: J. H. GRAF.

BERN
Druck und Verlag von K. J. Wyss
1901

OCT 17 1901

Jahresbericht

über die

Thätigkeit der bernischen Naturforschenden Gesellschaft

in der Zeit vom 1. Mai 1899 bis 11. Mai 1900.

Hochgeehrte Herren!

Im abgelaufenen Vereinsjahr hielt unsere Gesellschaft die normale Zahl von 12 Sitzungen ab, 6 davon im Saale des Hotels Storchen, 3 im geologischen Institut, je eine im physiologischen und zoologischen Institut und eine in Thun. An diesen Sitzungen beteiligten sich mit Vorträgen, kleineren Mitteilungen oder Demonstrationen die folgenden 16 Herren:

Herr	Baltzer	2 Vorträge, 2 Demonstrationen;
»	Benteli	1 Vortrag;
»	Brückner	1 »
»	Dutoit	1 »
»	Göldi	2 Vorträge;
»	Gruner	1 Demonstration;
»	Jenner	2 Demonstrationen;
»	Heffter	1 Vortrag;
»	R. Huber	1 »
»	Kaufmann	1 Demonstration;
»	Kissling	1 Vortrag;
»	Kostanecki	1 Demonstration;
»	Kronecker	1 Vortrag;
»	Steck	2 Demonstrationen;
»	Studer	2 Vorträge, 3 Demonstrationen;
»	Tschirch	1 Vortrag, 1 Demonstration.

Von diesen Mitteilungen entfallen auf Zoologie 12, auf Mineralogie, Geologie 5, Botanik 3, Physik, Astronomie 3, Chemie 2, Geographie 2, Physiologie 1.

Eine auswärtige Sitzung wurde am 25. Juni unter zahlreicher Beteiligung im Saale des Hotels «Freier Hof» in Thun abgehalten. Herr Dr. Ris daselbst hatte in dankenswerter Weise die Vorbereitungen übernommen. In der Sitzung sprach Herr Benteli: «Über die Niveauschwankungen der schweizerischen Seen, mit besonderer Berücksichtigung

der Jura-Seen», und Herr R. Huber: «Über das Wesen der Telegraphie ohne Draht.» Nachmittags erfolgte die gemeinsame Besichtigung der kantonalen Gewerbe- und Industrie-Ausstellung in Thun.

Die Mitgliederzahl hat sich im Berichtsjahre nicht wesentlich geändert. Ausgetreten sind zwei Mitglieder, durch den Tod verloren wir zwei Mitglieder. Eingetreten sind 3 neue Mitglieder.

Für das Vereinsjahr 1900/1901 wurde zum Präsidenten gewählt Herr Prof. Dr. Ed. Brückner, zum Vizepräsidenten Herr Dr. E. Kissling.

Der Präsident:

v. Kostanecki.

Sitzungs-Berichte.

944. Sitzung vom 20. Januar 1900.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. St. v. Kostanecki. Anwesend: 18 Mitglieder und Gäste.

Demonstrationsabend:

1. Hr. A. Baltzer demonstriert ein **geologisches Profil** durch die Schänzlimoräne.
2. Hr. A. Baltzer weist eine Reihe **Mineralien** vor.
3. Hr. Th. Steck legt die älteste und die neueste monographische Arbeit über **Hydrachniden** (Wassermilben) vor. Die erstere hat den bekannten Naturforscher Otto Friedrich Müller zum Verfasser und behandelt die Wassermilben Dänemarks in für damalige Verhältnisse (das Werk erschien im Jahre 1781) musterhafter Weise.

   Die neueste, soeben zum Abschluss gekommene Monographie von Dr. Rich. Piersig umfasst unter dem Titel: **Deutschlands Hydrachniden**, nicht nur die in Deutschland, sondern auch sämtliche bisher in der Schweiz aufgefundenen Arten. Zum ersten Male werden auch die Entwicklungsstadien, soweit dieselben bisher bekannt sind, bei der Beschreibung der Arten berücksichtigt. Das 500 Quartseiten starke und von 51 zum Teil colorierten Tafeln begleitete Werk wird noch lange zum Ausgangspunkte für alle weiteren systematischen und faunistischen Forschungen über diese Tiergruppe dienen müssen.
4. Hr. Th. Studer demonstriert eine Anzahl **älterer und neuerer Hundeschädel.**
5. Hr. P. Gruner legt eine Arbeit von Lowell über den **Planeten Merkur,** eine Abhandlung Villigers über die **Venus** und den **photographischen Atlas** von Scheiner vor.
6. Hr. St. v. Kostanecki demonstriert eine Anzahl gelber Farbstoffe, **Chrysin** und **Tecto-Chrysin**, die er künstlich darstellen konnte.

945. Sitzung vom 27. Januar 1900.

Abends 8 Uhr im geologischen Institut.

Vorsitzender: Hr. St. v. Kostanecki. Anwesend: 25 Mitglieder und Gäste.

1. Hr. A. Baltzer spricht über «**Altes und Neues von der Insel Rügen**».
2. Hr. A. Baltzer spricht über «**Eiszeiten und Schreibkreide**».
3. Hr. Th. Steck referiert über eine Arbeit von Hrn. Volz, betreffend **die Turbellarien in der Gegend von Aarberg.**

946. Sitzung vom 10. Februar 1900.

Abends 8 Uhr im zoologischen Institut.

Vorsitzender: Hr. St. v. Kostanecki. Anwesend: 20 Mitglieder und Gäste.

1. Hr. Th. Studer spricht über «**die Fauna der Hawaï-Inseln**».

947. Sitzung vom 24. Februar 1900.

Abends 8 Uhr im geologischen Institut.

Vorsitzender: Hr. St. v. Kostanecki. Anwesend: 32 Mitglieder und Gäste.

1. Hr. Ed. Brückner spricht über «**neuere Probleme der Gletscherforschung.**»

948. Sitzung vom 10. März 1900.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. St. v. Kostanecki. Anwesend: 24 Mitglieder und Gäste.

1. Hr. A. Heffter spricht über «**die Peyote, ein Berauschungsmittel der mexikanischen Indianer**».
2. Hr. A. v. Jenner macht eine Mitteilung über die «**Staare**».

949. Sitzung vom 28. April 1900.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. St. v. Kostanecki. Anwesend: 22 Mitglieder und Gäste.

1. Für das Vereinsjahr 1900/1901 werden gewählt:
   Hr. Prof. Dr. Ed. Brückner zum Präsidenten,
   Hr. Dr. E. Kissling zum Vize-Präsidenten.
2. Hr. E. Kissling spricht über «**Bergbau und Molassekohlen in der westlichen Schweiz**».
3. Hr. E. Dutoit spricht über den «**Vegetationscharakter des Val de Cogne**».

950. Sitzung vom 12. Mai 1900.

Vorsitzender: Hr. Ed. Brückner. Anwesend: 20 Mitglieder und Gäste.

1. Der abtretende Präsident, Hr. Prof. v. Kostanecki, verliest den Jahresbericht pro 1899/1900.
2. Herr A. Guillebeau teilt mit, dass Hr. Karl Vaerst in seinem Laboratorium über die **Fleckniere der Kälber** folgendes festgestellt hat:

Die Fleckniere kommt in Bern bei 3,5% der gemästeten, etwa 6—8 Wochen alten Kälbern vor. In kurzer Zeit können daher eine grössere Zahl dieser Nieren gesammelt werden. Die Erscheinung besteht in dem Auftreten von kleinsten, bis nussgrossen, weissen Knoten in der Rindensubstanz der Niere. Es können nur wenige aber auch einige hundert Knoten vorhanden sein, ja die Flecken sind eventuell so zahlreich, dass das normale Gewebe nur in Form dünner Schichten die weissen Herde umsäumt. Letztere wölben sich entweder über die Umgebung vor, oder ihr freies Ende bildet eine kleine Vertiefung. Das Mark erscheint dem unbewaffneten Auge als unbeteiligt, mikroskopisch aber konstatiert man auch hier das Vorkommen dünner, weisser Streifen. Die Konsistenz der Knoten ist dieselbe wie diejenige des übrigen Nierengewebes. Die wenigen Schriftsteller, die sich mit diesen Flecken beschäftigt haben, bezeichnen den Zustand als multiple Sarkome, als pyämische Metastasen,

als fibroplastische Nephritis, alles Benennungen, die sehr wenig begründet sind.

Die Herde bestehen aus einer Grundsubstanz und aus eingelagerten Drüsenbestandteilen, letztere in bald geringerer, bald grösserer Zahl. Die Grundsubstanz ist ein rundzelliges Granulationsgewebe, das sich in älteren Herden zu Spindelzellengewebe differenziert und in dem die Bindegewebsfibrillen immer zahlreicher und in demselben Masse die Kerne seltener werden.

Sehr bemerkenswert sind die Drüsenbestandteile, die bald in kleinerer, bald in grösserer Zahl in den Knoten enthalten sind. Es können eventuell alle Abschnitte der Kanälchen angetroffen werden. Vielfach enden dieselben peripher mit einer spitzen, soliden Sprosse, die dem Gebiet der gewundenen Hornkanälchen angehört, etwas seltener demjenigen der Schleifenschenkel. Die Sprossen zeichnen sich durch grosse Breite aus. Sie bestehen aus einem Mantel randständiger, gut zu Epithelien differenzierter Zellen und aus einem centralen Cylinder kleiner, mehrkerniger Randzellen, die wie ein Keil die Sprossen vortreiben. Eine Membrana propria ist da oder fehlt. In der Nähe der Sprossen ist das Grundgewebe ebenfalls sehr zellenreich.

Die Glomeruli sind bald in gewöhnlicher Zahl vorhanden, bald selten oder ganz fehlend. Sie treten dem Beobachter entweder als Haufen von Granulationsgewebe entgegen, der durch einen Spalt von der Umgebung scharf abgegrenzt ist, oder die Gefässe sind deutlich sichtbar. Sobald das Harnkanälchen mit dem Glomerulus versehen ist, verschwindet sein zellenreicher Markcylinder, das Röhrchen, das noch gestreckt ist, wird vorübergehend eng und die Zellen werden noch nicht, wie in den fertig gebildeten Röhrchen, durch Pikrinsäure gelb gefärbt, sondern sie zeigen die Farbenreaktionen der Protoplasmas von Leukocythen. Der Übergang der embryonalen in die definitive Beschaffenheit vollzieht sich zuerst im Labyrinth. Die Markstrahlen sind länger durch den Gehalt an Blastem ausgezeichnet.

Da die Fleckniere mit keiner Störung der Gesundheit in Verbindung zu bringen ist und bei erwachsenen Rindern konstant fehlt, so darf man annehmen, dass im Verlaufe von wenig Wochen die Knoten spurlos in dem übrigen Nierengewebe aufgehen.

Auf Grund dieses Befundes nötigt sich der Schluss auf, dass die weissen Knoten der Fleckniere des Kalbes aus Nierenblastem bestehen, in dem eine fortgesetzte Anbildung von Drüsenelementen stattfindet. Dieses Blastem, das in der Regel nur dem frühen embryonalen Leben angehört, überdauert beim Kalbe das intrauterine Leben um einige Wochen. Es liegt somit hier ein leicht zugängliches, bis jetzt ganz unbeachtetes Material für das Studium der Entwicklung des Metanephros vor.

3. Hr. Ed. Brückner spricht über «**Imhofs Arbeit über die Waldgrenze in der Schweiz**».

951. Sitzung vom 26. Mai 1900.

Vorsitzender: Hr. Ed. Brückner. Anwesend: 24 Mitglieder und Gäste.

1. Hr. Ed. Fischer referiert über **die neueren Untersuchungen betreffend die Befruchtung der Gymnospermen**, speziell die Entdeckung der Spermatozoiden bei Ginkgo und Cycas durch Hirasé und Ikeno.

2. Hr. Ed. Fischer weist Exemplare von **Morchella rimosipes DC.** vor, die von Herrn Lehrer Bangerter in der Nähe von Utzenstorf gesammelt worden waren, und erläutert die Unterschiede dieser Art gegenüber M. esculenta und M. conica.
3. Hr. P. Gruner macht eine Mitteilung über die bevorstehende **Sonnenfinsternis** und über einen eigenartigen, von ihm beobachteten **Sonnenring.** Am 23. Mai, $6^1/_2$ Uhr morgens, sah der Referent auf einer schön ausgebildeten Cirruswolke, die nahe am Zenith stand, einen in den schönsten Regenbogenfarben erglänzenden Bogen, dessen Öffnung auf 10—20°, dessen Länge auf $^1/_6$ eines ganzen Kreisumfanges, geschätzt wurde; das Centrum schien nicht weit vom Zenithe zu sein, doch etwas gegen Osten, also gegen die aufgehende Sonne hin verschoben. — Nach etwa 3 Minuten löste sich die Cirruswolke auf und mit ihr der Bogen. Der Himmel war nun fast wolkenlos, nur noch im Osten, nahe der Sonne, in etwa 20° Distanz rechts von derselben zeigten sich während einer Viertelstunde Spuren eines gewöhnlichen Sonnenringes (rot innen gegen die Sonne, violett aussen); nachher lösten sich auch diese Cirri auf. — Am selben Tage fand ein gründlicher Witterungswechsel statt.

952. Sitzung vom 24. Juni 1900.

In Spiez.

1. Hr. Ringwald, Betriebsleiter des Elektrizitätswerkes an der Kander spricht über «**elektrische Kraftgewinnung und Kraftübertragung**».
2. Hr. Ringwald leitet die Besichtigung der **elektrischen und hydraulischen Anlagen an der Kander.**

953. Sitzung vom 27. Oktober 1900.

Abends 8 Uhr im pharmaceutischen Institut.

Vorsitzender: Hr. Ed. Brückner. Anwesend: 28 Mitglieder und Gäste.

1. Hr. A. Tschirch spricht über «**die Entwicklung der Chinologie im 19. Jahrhundert**».

954. Sitzung vom 10. November 1900.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. Ed. Brückner. Anwesend: 60 Mitglieder und Gäste.

1. Hr. C. Marti, Sekundarlehrer in Nidau, spricht über «**die Gesetze des Wetters**».

955. Sitzung vom 24. November 1900.

Abends 8 Uhr im geologischen Institut.

Vorsitzender: Hr. Ed. Brückner. Anwesend: 26 Mitglieder und Gäste.

Demonstrationsabend:

1. Hr. Ed. Fischer weist der Gesellschaft die Bearbeitung der **Pilze** aus dem grossen von Engler und Prantl in Verbindung mit zahlreichen Mitarbeitern herausgegebenen Sammelwerke «die natürlichen Pflanzenfamilien» vor und knüpft daran einige Bemerkungen über den Plan dieses Werkes und seine Bedeutung für die Pflanzensystematik.

Derselbe legt ferner das zweite Heft der von der Kommission für die Kryptogamenflora der Schweiz herausgegebenen Beiträge zur Kryptogamenflora der Schweiz vor. Es enthält dasselbe die Bearbeitung der schweizerischen Farne und Hydropteriden von Dr. H. Christ.

2. Hr. Th. Steck berichtet über seine in Begleitung des Hrn. Paul Born-Moser aus Herzogenbuchsee und auf Kosten des Hrn. Georg Meyer-Darcis in Wohlen (Aargau) im Juli 1900 ausgeführte **entomologische Sammelreise in die grajischen Alpen** und legt einen grossen Teil der bei diesem Anlasse gemachten Ausbeute an Käfern vor.
3. Hr. A. Baltzer führt verschiedene Serien von **Projektionsbildern** vor.

956. Sitzung vom 8. Dezember 1900.

Abends 8 Uhr im zoologischen Institut.

Vorsitzender. Hr. E. Kissling. Anwesend: 22 Mitglieder und Gäste.

1. Hr. J. Schapiro spricht über «**Fortschritt und Rückschritt in biologischer Bedeutung**».
2. Hr. Th. Studer weist eine Anzahl **neuer Präparate** vor.

Verzeichnis der Mitglieder

der

Bernischen Naturforschenden Gesellschaft.

(Am 31. Dezember 1900.)

Die mit * bezeichneten Mitglieder wurden im Jahre 1900 neu aufgenommen.

Vorstand.

Prof. Dr. *Ed. Brückner,* Präsident.
Dr. *E. Kissling,* Vice-Präsident.
B. Studer, jun., Apotheker, Kassier seit 1875.
Prof. Dr. *J. H. Graf,* Redaktor der Mitteilungen seit 1883.
Dr. *Th. Steck,* Oberbibliothekar und Geschäftsführer des Lesezirkels.
Dr. *P. Gruner,* Sekretär seit 1898.

Mitglieder.

1. *Allemann,* J., Arzt, Zweisimmen 1898
2. *Anderegg,* Ernst, Dr. phil. und Gymnasiallehrer, Bern . 1891
3. *Andreae,* Philipp, Apotheker, Bern 1883
4. *Badertscher,* Dr. A., Sekundarlehrer, Bern 1888
5. *Balmer,* Dr. Hans, Bern 1886
6. *Baltzer,* Dr. A., Professor der Mineralogie und Geologie, Bern 1884
7. *Beck,* Dr. Gottl., Lehrer des Freien Gymnasiums, Bern . 1876
8. *v. Benoit,* Dr. jur. G., Bern 1872
9. *Benteli,* A., Rektor und Dozent, Bern 1869
10. *Benteli,* A., Buchdrucker, Bern 1891
11. *Berdez,* H., Professor an der Thierarzneischule, Bern . 1879
12. *Brückner,* Dr. Ed., Prof. der Geographie, Bern . . 1888
13. *Brunner,* C., Dr. phil., Hofrath, Trautsohngasse 6, Wien . 1846
14. *Büchi,* Fr., Optiker, Bern 1874
15. *Burri,* Dr. phil., Prosektor 1895
16. *v. Büren,* Eug., allié von Salis, Sachwalter, Bern . . 1877
17. *Coaz,* Dr., eidgenössischer Oberforstinspektor, Bern . . 1875
18. *Conrad,* Dr. Fr., Arzt in Bern 1872
19. *Dick,* Dr. Rud., Arzt in Bern 1876
20. *Droz,* Arnold, Kantonsschullehrer in Pruntrut . . 1890

21. *Dubois,* Dr. med., Arzt, Privatdocent, Bern . . . 1884
22. *Dumont,* Dr. med. F., Arzt, Privatdocent, Bern . . 1890
23. *Dutoit,* Dr. med., Arzt in Bern 1867
24. *Egues,* Jules, Dr. med., Corgémont 1898
25. *Engelmann,* Dr., Apotheker in Basel 1874
26. *Farner,* Dr. A., Apotheker 1899
27. *v. Fellenberg,* Dr. phil. E., Bergingenieur, Bern . . . 1861
28. *Fischer,* Dr. phil. Ed., Professor der Botanik, Bern . . 1885
29. *Fischer,* Dr. L., Honorar-Professor, Bern 1852
30. *v. Freudenreich,* Dr. E., Bern 1885
31. *Friedheim,* Dr. Prof., Bern 1897
32. *Geering,* Ernst, Dr. med., Reconvillier 1898
33. *de Giacomi,* J., Dr. med., Arzt und Privatdocent, Bern . 1889
34. *Girard,* Prof. Dr. med., Arzt in Bern 1876
35. *Gosset,* Philipp, Ingenieur, Wabern bei Bern . . . 1865
36. *Graf,* Dr. J. H., Professor der Mathematik, Bern . . 1874
37. *Gressly,* Alb., Oberst, Maschinen-Ingenieur, Bern . . 1872
38. *Grimm,* J., Präparator, Bern 1876
39. *Gruner,* Dr. Paul, Gymnasiallehrer und Docent, Bern . 1892
40. *Guillebeau,* Professor Dr., Bern 1878
41. *Haaf,* C., Droguist, Bern 1857
42. *Haas,* Dr. med., Sigismund, Arzt in Muri bei Bern . . 1890
43. **Häni,* Rud., Dr. med., Arzt in Köniz. 1900
44. *Hartmann,* Dr. phil., Mathemat. a. Eisenbahndepartement, Bern 1898
45. *Heffter,* Dr. A. W. A., Prof. der med. Chemie u. Pharmakologie 1899
46. *Held,* Leon, Chef des eidgen. topograph. Bureaus, Bern . 1879
47. *Huber,* Dr. G., Professor der Mathematik, Bern . . 1888
48. *Huber,* Rud., Dr. phil., Gymnasiallehrer, Bern . . . 1891
49. *Hug,* Otto, Dr. phil., Bern 1897
50. **Hugi,* E., Dr. phil., Assistent am geolog. Institut, Bern . 1900
51. *Jadassohn,* Dr. Prof., Bern 1897
52. *Jenner,* E., Entomolog, hist. Museum, Bern . . . 1870
53. *Jonquière,* Dr. med. Georg, Arzt in Bern 1884
54. *Käch,* P., Sekundarlehrer in Bern 1880
55. *Kaufmann,* Alfr., Dr. phil. und Gymnasiallehrer, Bern . 1886
56. *Kesselring,* H., Lehrer an der Sekundarschule in Bern . 1870
57. *Kissling,* Dr. E., Sekundarlehrer und Privatdocent, Bern . 1888
58. *Kobi,* Dr., Rektor der Kantonsschule Pruntrut . . . 1878
59. *Kocher,* Dr., Professor der Chirurgie, Bern . . . 1872
60. *Koller,* G., Ingenieur, Bern 1872
61. *von Kostanecki,* Dr., Professor der Chemie, Bern . . 1896
62. *König,* Emil, Dr. phil., Gymnasiallehrer, Bern . . . 1893
63. *Körber,* H., Buchhändler in Bern 1872
64. *Kraft,* Alex., Besitzer des Bernerhofs, Bern . . . 1872
65. *Krebs,* A., Seminarlehrer in Bern 1888
66. *Kronecker,* Dr. H., Professor der Physiologie, Bern . . 1884
67. *Kummer,* Dr. med. J., Arzt in Bern 1890
68. *Kürsteiner,* Dr. med., Bern 1895
69. *La Nicca,* Dr. med. R., Arzt in Bern 1899
70. *Lanz,* Dr. Em., Arztin Biel 1876
71. *Leist,* Dr. K., Lehrer an der Sekundarschule in Bern . 1888

72. *Lerch,* M., Professor Dr. in Freiburg 1898
73. *v. Lerber,* A., Dr. med., Arzt in Laupen 1898
74. *Lindt,* Dr. med., W. jun., Arzt und Dozent in Bern . 1888
75. *Lory,* C. L., Rentier in Münsingen 1894
76. *Lüscher,* E., Dr. med. in Bern 1895
77. *Lütschg,* J., gewesener Waisenvater in Bern . . . 1872
78. *Marckwald,* Dr. Max, Frankfurt a. M. 1889
79. *Marti,* Christian, Sekundarlehrer in Nidau . . . 1889
80. *Marti,* Lehrer an der Neuen Mädchenschule in Bern . 1892
81. *Moser,* Dr. phil. Ch., Privatdocent in Bern . . . 1884
82. *Müller,* Emil, Apotheker in Bern 1882
83. *Müller,* Professor Dr., P., in Bern 1888
84. *Müller,* Max, Dr. med. in Bern 1893
85. *v. Mutach,* Alfred, von Riedburg, Bern 1865
86. *Mützenberg,* Dr. med. Ernst, Spiez 1885
87. *Nanny,* Dr. Wilhelm, Arzt in Bern 1890
88. *Nicolet,* L., Pharmacien, St. Imier 1892
89. *Pfister,* J. H., Mechaniker in Bern 1871
90. *Pflüger,* Dr. Professor in Bern 1889
91. *Pulver,* E., Apotheker in Interlaken 1890
92. *Pulver,* G., Vorsteher in Hindelbank 1891
93. *Renfer,* H., Dr. Prof. an der Handelsakademie in St. Gallen 1898
94. *Ris,* F., Lehrer der Physik am städtischen Gymnasium . 1869
95. **Rothen,* A., Sekundarlehrer, Bern 1900
96. *Rothenbach,* Alfred, Alt-Gasdirektor in Bern . . . 1872
97. *Rothenbühler,* Dr., Sekundarlehrer in Bern . . . 1896
98. *Rubeli,* Dr. O., Professor an der Thierarzneischule, Bern . 1892
99. *Sahli,* Professor Dr. H., Bern 1875
100. **Sauter,* Dr. J., Ingenieur, Bern 1900
101. *Schaffer,* Dr., Kantonschemiker und Docent, Bern . . 1878
102. **Schapiro,* Dr. J., Bern 1900
103. *Schlachter,* Dr., Gymnasiallehrer, Bern 1884
104. *Schmid,* Dr. W., Oberst, Oberinstruktor der Artillerie, Bern 1891
105. *Schürch,* Otto, Dr. phil., Zahnarzt, Langnau . . . 1898
106. *Schütz,* Assistent des Kantonschemikers, Bern . . . 1896
107. *Sidler,* Dr., Honorar-Professor, Bern 1856
108. *v. Speyr,* Dr. Prof., Direktor der Waldau . . . 1898
109. *Stäger,* Rob., Dr. med., Bern 1898
110. *Steck,* Th., Dr. phil., Conservator am Naturhist. Museum Bern 1878
111. *Steiger,* Hans, Oberstlieutenant, Bern 1897
112. *Stooss,* Professor Dr. med. Max, Arzt in Bern . . 1883
113. *Strasser,* Dr. Hans, Professor der Anatomie, Bern . . 1872
114. *Strelin,* Alexander, Dr. med., Arzt, Bern 1898
115. *Streun,* G., Dr., Lehrer auf der Rütti 1898
116. *Studer,* Bernhard, sen., Bern 1844
117. *Studer,* Bernhard, Apotheker, Bern 1871
118. *Studer,* Dr. Theophil, Professor der Zoologie, Bern . . 1868
119. *Studer,* Wilhelm, Apotheker in Bern 1877
120. *Tambor,* J., Dr. phil., Docent, Laboratorium, Bern . . 1894
121. *Tanner,* G. H., Apotheker in Bern 1882
122. *Tavel,* Professor Dr. E., Bern 1892

123. *Thiessing,* Dr., Redaktor, Bern 1867
124. *v. Tscharner,* Dr. phil. L., Oberst, Bern 1874
125. *v. Tscharner-de Lessert,* Oberst, Bern 1878
126. *Tschirch,* Dr. A., Professor der Pharmakognosie in Bern . 1890
127. *Valentin,* Professor Dr. med. Ad., Arzt in Bern . . 1872
128. *Vögeli,* H., Dr. med., Thun 1898
129. *Volz,* Wilhelm, Apotheker in Bern 1887
130. *Wäber-Lindt,* A., Bern 1864
131. *Walthard,* Max, Dr. med. P.-D., Arzt in Bern . . . 1894
132. *Wanzenried,* Sekundarlehrer in Grosshöchstetten . . 1867
133. *v. Wattenwyl-v. Wattenwyl,* Jean, Oberst, Bern . . 1877
134. *Wilhelmi,* A., Dr. Thierarzt, Bern 1898
135. *Wollensack,* Heinrich, Dr. med., Giessbach . . . 1898
136. *Wüthrich,* Dr. phil. E., Direktor der Molkereischule Rütti 1892
137. *Wyss,* Dr. G., Buchdrucker in Bern 1887
138. *Wyttenbach-v. Fischer,* Dr., Arzt in Bern 1872
139. *Zeller,* R., Dr. phil., Geolog, Bern 1893
140. *Zumstein,* Dr. med., J. J., in Marburg . . . 1885

Im Jahre 1900 ausgetreten:

Cherbuliez, Mülhausen. 1861
Crelier, Dr., Lehrer am Technikum, Biel 1896
Eggenberger, J., Dr. phil., Versicherungsbeamter . . . 1892
Flach, Arthur, Dr. med., Bern 1898
Humbel, Rud., Thierarzt, Nieder-Bipp 1898
Lochbrunner, Th., Uhrmacher, Bern 1896
Michailoff, S. Dr., meteorologische Centralstation Sofia . . 1898
Sahli, Dr. W., Bern 1898
Zwicky, Lehrer am städtischen Gymnasium, Bern . . . 1856

Im Jahre 1900 gestorben:

Hasler, Dr. phil. G., Direktor der Telegraphenwerkstätte, Bern 1861
Rothenbach, Lehrer am Lehrerseminar in Küssnacht . . 1871
Schwab, Dr. med. S., Bern 1885
Ziegler, Dr. med., A., eidgenössischer Oberfeldarzt, Bern . 1859

Korrespondierende Mitglieder:

1. *Flesch*, Dr. M., Arzt in Frankfurt 1882
2. *Gasser*, Dr. E., Professor der Anatomie in Marburg . . 1884
3. *Graf*, Lehrer in St. Gallen 1858
4. *Grützner*, Dr. A., Professor in Tübingen 1881
5. *Hiepe*, Dr. Wilhelm, in Birmingham 1874
6. *Imfeld*, Xaver, Topograph in Hottingen 1880
7. *Krebs*, Gymnasiallehrer in Winterthur 1864
8. *Landolf*, Dr., in Chili 1881
9. *Lang*, Dr. A., Professor in Zürich 1876
10. *Leonhard*, Dr., Veterinär in Frankfurt 1870
11. *Lichtheim*, Professor in Königsberg 1881
12. *Metzdorf*, Dr., Prof. der Vet.-Schule in Proskau, Schlesien. 1870
13. *Petri*, Dr. Ed., Professor der Geographie in St. Petersburg 1883
14. *Regelsperger*, Gust., Dr., rue la Boétie 85, Paris . . 1883
15. *Wälchli*, Dr. med. D. J., Buenos Ayres 1873
16. *Wild*, Dr. Professor, in Zürich 1859

Rechnung der bernischen naturforschenden Gesellschaft pro 1899.

Einnahmen:

An Jahresbeiträgen	Fr.	1208.—
An Eintrittsgeldern	»	15.—
An Zinsen	»	97.55
Aktiv-Saldo letzter Rechnung	»	287.90
	Fr.	1608.45

Ausgaben:

Mitteilungen	Fr.	658.30
Bibliothek	»	249.65
Sitzungen	»	117.35
Lesezirkel	»	160.75
Verschiedenes	»	97.75
	Fr.	1283.80

Bilanz:

Einnahmen	Fr.	1608.45
Ausgaben	»	1283.80
Aktiv-Saldo	Fr.	324.65

Reservefonds:

Ist im Jahre 1899 unverändert geblieben mit . . Fr. 1800.—

Vermögensetat:

Das Vermögen der bernischen naturforschenden Gesellschaft besteht auf 31. Dezember 1899 in dem Reservefonds wie oben	Fr.	1800.—
Dem Aktiv-Saldo pro 1899	»	324.65
	Fr.	2124.65
Auf 31. Dezember 1899 beträgt das Vermögen	Fr.	2124.65
Auf 31. Dezember 1898 betrug dasselbe	»	2087.90
Es ergiebt sich demnach eine Vermehrung um	Fr.	36.75

Der Kassier:

B. Studer-Steinhäuslin.

Genehmigt in der Sitzung vom 27. Oktober 1900.

H. Renfer.

Die Definitionen

der

Bernoullischen Funktion

und Untersuchung der Frage,

welche von denselben für die Theorie die zutreffendste ist.

[Historisch-kritisch beleuchtet.]

Einleitung.

Die Vorgeschichte des hier zu behandelnden Gegenstandes ist ziemlich rasch erschöpft. was schon aus der spärlichen Litteratur über diese Funktion hervorgehen dürfte, sind es doch äusserst wenige Autoren, die sich mit einer speziellen Untersuchung der Bernoullischen Funktion befreundet haben.[1]) Weit grösser ist die Anzahl der Schriften über die Bernoullischen Zahlen, auf deren Theorie sich diejenige der Bernoullischen Funktion aufbaut.[2]) Die vorliegende Arbeit setzt die Kenntnis der Theorie der Bernoullischen Zahlen[3]) voraus, wenigstens in Bezug auf ihre wichtigsten Eigenschaften und Beziehungen und die gebräuchlichsten Rekursionsformeln. Wo es nötig ist, wird jeweilen auf die betreffende Litteratur verwiesen.

Eingeführt in die algebraische Analysis wurde die Bernoullische Funktion von Professor Dr. *J. L. Raabe* in Zürich durch seine Arbeit *»Die Jakob Bernoullische Funktion«*, die im Jahre 1848 im Verlage von Orell, Füssli & Cie. in Zürich erschien. Raabe gelangte gestützt auf Reihensummierungen und mit Hülfe der Bernoullischen Summenformel auf diese Funktion; gemäss letzterer Beziehung benannte er dieselbe nach dem grossen Basler Mathematiker Jakob Bernoulli.[4]) Als Beleg diene der Anfang des Vorwortes der oben erwähnten Schrift:

«Bei der Summation der ohne Ende fortlaufenden Reihe

$$a_1 + 2^m.a_2x + 3^m.a_3x^2 + \cdots\cdots + p^m.a_px^{p-1}$$
$$+ (p+1)^m a_1x^p + (p+2)^m a_2x^{p+1} + (p+3)^m a_3x^{p+2} + \cdots\cdots + (p+p)^m a_px^{2p-1}$$
$$+ (2p+1)^m a_1x^{2p} + (2p+2)^m a_2x^{2p+1} + (2p+3)^m a_3x^{2p+2} + \cdots\cdots + (2p+p)^m a_px^{3p-1}$$
$$+ (3p+1)^m a_1x^{3p} + (3p+2)^m a_2x^{3p+1} + (3p+3)^m a_3x^{3p+2} + \cdots\cdots + (3p+p)^m a_px^{4p-1}$$

$+$ in inf.

an der äussersten Grenze ihrer Konvergenz, wobei m eine ganze und positive Zahl, Null mitbegriffen, vorstellt und $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_p$ endliche Konstanten sind, wird man auf einen Ausdruck geführt, der die von Jakob Bernoulli eingeführten, nach ihm benannten Zahlen impliziert, und welcher zur Summierung der Reihe mit dem allgemeinen Gliede r^m, wo r alle ganzen Zahlenwerte von 1 aufwärts gezählt annehmen kann, von ihm benutzt worden ist. Diesen Ausdruck, in seiner Allgemeinheit, nenne ich die «Jakob Bernoullische Funktion» oder kürzer die «Bernoullische Funktion», und bezeichne solche, gleich wie die Bernoullischen Zahlen, die sie enthält, durch $B_1, B_2, B_3, \ldots\ldots B_m, \ldots\ldots$ dargestellt zu werden pflegen, durch $B(z)$, falls z die allgemeine Grösse oder Variabele dieser Funktion ist.»

Im Jahre 1851 erschien eine zweite Abhandlung Raabes über denselben Gegenstand, betitelt «*Zurückführung einiger Summen und bestimmten Integrale auf die Jakob Bernoullische Funktion.*»[5]) Durch diese Arbeit wird seine frühere Schrift bedeutend erweitert und ergänzt.

Nach Raabe hat sich dann auch Dr. *O. Schlömilch*, Professor an der polytechnischen Schule zu Dresden, einlässlich mit dieser Funktion beschäftigt. Seine im Jahre 1856 in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Band I, Seite 193 u. ff. veröffentlichte Abhandlung «*Ueber die Bernoullische Funktion und deren Gebrauch bei der Entwicklung halbkonvergenter Reihen*» stellt die Bernoullische Funktion elegant als Nullwert von Differentialquotienten dar. Diese Darstellung ist sehr interessant; die Ausdrücke für die Spezialwerte der verschieden hohen Derivierten sind ziemlich einfach anzusehen, doch sind die Operationen,

welche damit auszuführen sind, wie wir sehen werden, oft schwierig und erfordern viel Zeit. Die Schlömilchsche Definition stimmt nicht mit derjenigen von Raabe überein; doch ist die Beziehung zwischen beiden sehr einfach aufzustellen, was wir in einem spätern Abschnitt dieser Arbeit darstellen werden. Etwas erweitert findet sich die vorhin erwähnte Abhandlung auch in Schlömilchs «Compendium der höhern Analysis.» Braunschweig 1866, Seite 207 u. ff. des II. Bandes.

Wie aus den hinterlassenen Manuskripten von Professor Dr. *L. Schläfli* in Bern hervorgeht, hat sich auch dieser eingehend mit der Bernoullischen Funktion beschäftigt. Seine Definition stimmt mit den beiden vorher erwähnten nicht überein; er kommt, allerdings auf ganz anderem Wege, zu einer den frühern aber nahe verwandten Funktion, nämlich als Zusammenhang mit den Koeffizienten einer Binomialentwicklung. Das Interessante seiner Definition ist, dass dieselbe aus der gleichen Fundamentalbeziehung herstammt, wie die Definitionsgleichung der Bernoullischen Zahlen. Immerhin lässt sich seine Definition mit den beiden vorhergehenden in einfache Beziehungen bringen.

Schliesslich hat sich in den letzten Jahren noch der englische Mathematiker Dr. *J. W. L. Glaisher* sehr eingehend mit dieser Funktion befasst. Von demselben existieren zwei in englischen mathematischen Zeitschriften erschienene Abhandlungen über diesen Gegenstand. Nachdem derselbe in seiner ersten Arbeit «*On the Bernoullian Function*,»[6]) die allgemeine Theorie der Bernoullischen Funktion ausführlich entwickelt hatte, gab er in seiner zweiten Schrift «*On the definite Integrals connected with the Bernoullian Function*»[7]) meist Integraldarstellungen der Bernoullischen Funktion, wie es ja schon der Titel sagt; es finden sich jedoch auf Seite 21 einzelne Spezialwerte dieser Funktion, so dass die letztgenannte Schrift zu den vorliegenden Untersuchungen ebenfalls herbeigezogen werden musste.

Es handelt sich nun darum, nachzuweisen, welche dieser verschiedenen Definitionen von Raabe, Schlömilch, Schläfli und Glaisher, und letzterer hat selbst wieder von einander abweichende aufgestellt, für die Theorie die zutreffendste ist. Um diese Frage entscheiden zu können, müssen wir uns vorerst mit den einzelnen Definitionen vertraut machen. Wir betrachten daher der Reihe nach die verschiedenen Definitionen, möglichst erschöpfend und mit Weglassung alles Nebensächlichen. Gestützt auf diese Betrachtungen treffen wir dann unsere Folgerungen und den Entscheid der Frage. Die einzelnen Abschnitte

gliedern sich im Wesentlichen gleichartig, nur lassen sich bei der einen Definition diese Eigenschaften, bei der andern jene leichter aus der Grundgleichung ableiten. Im ganzen soll der historische Gang möglichst innegehalten werden.

Endlich sei der Vollständigkeit halber noch bemerkt, dass sich bei einzelnen Arbeiten über die Bernoullischen Zahlen hie und da einige Bemerkungen über die Bernoullische Funktion finden. Am Schlusse dieser Arbeit findet sich deshalb ein Verzeichnis sämtlicher benutzter Quellen und Werke.

Die dieser Arbeit beigefügten Tabellen und Kurven wurden selbst berechnet und dargestellt.

I. Die Bernoullische Funktion nach J. Raabe.

§ 1. Herleitung der Definition.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, gelangt Raabe auf diese Funktion bei der Entwicklung von $\sum x^m$ in eine Potenzreihe unter Anwendung des binomischen Satzes. Der Weg der Herleitung vermittelst Summation von Differenzreihen ist so ausgedehnt, dass hier auf eine Wiedergabe desselben verzichtet werden muss, da dies den Rahmen der vorliegenden Arbeit weit überschreiten würde, umfasst die Ableitung dieser Definition in Raabes erster Schrift ja nicht weniger als dreizehn Druckseiten, zudem ist die Herleitung ziemlich einfach und bietet durchaus keine Schwierigkeiten.[8])

Raabe definiert darin

$$B(z) = \frac{z^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{2} z^m + \frac{1}{2} \binom{m}{1} B_1 z^{m-1} - \frac{1}{4} \binom{m}{3} B_2 z^{m-3} + \frac{1}{6} \binom{m}{5} B_3 z^{m-5} - + \cdots\cdots \quad (1)$$

als die «Bernoullische Funktion.»

Aus dem Grunde, dass der Funktionsexponent m nicht in der ganzen Allgemeinheit einer absoluten Variabelen auftritt, hat Raabe denselben in der Bezeichnung der Bernoullischen Funktion unbeachtet gelassen. Da sich eine Verschiedenheit der Bernoullischen Funktion

mit geradem und ungeradem Exponenten ergibt, so bezeichnet er die Bernoullische Funktion mit geradem Exponenten 2 m durch $B''(z)$ und diejenige mit ungeradem Exponenten $(2m+1)$ durch $B'(z)$, wobei m = ganz und positiv, weshalb sich folgende zwei Definitionsgleichungen ergeben

$$B''(z) = \frac{z^{2m+1}}{2m+1} - \frac{1}{2} z^{2m} + \frac{1}{2}\binom{2m}{1} B_1 z^{2m-1} - \frac{1}{4}\binom{2m}{3} B_2 z^{2m-3} + - \cdots\cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m}{2m-1} B_m . z. \quad (2)$$

$$B'(z) = \frac{z^{2m+2}}{2m+2} - \frac{1}{2} z^{2m+1} + \frac{1}{2}\binom{2m+1}{1} B_1 z^{2m} - \frac{1}{4}\binom{2m+1}{3} B_2 z^{2m-2} + - \cdots\cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m+1}{2m-1} B_m z^2. \quad (3)$$

Aus diesen beiden Hauptgleichungen ist ersichtlich, dass nach Raabe auf der rechten Seite kein von der Variabelen freier Term vorkommen darf, eine Bestimmung, welche, wie wir sehen werden, die so definierte Bernoullische Funktion zu wenig allgemein macht.

Bedeutend rascher gelangt Raabe in seiner zweiten Arbeit zu der nämlichen Definitionsgleichung. Ausgangspunkt dieser Herleitung ist die bekannte Beziehung

$$x = \pi - 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin k x}{k}.$$

Dieser Ausdruck wird mehrmals nacheinander mit dx multipliziert und zwischen den Grenzen 0 und x integriert; so entstehen successive die Bernoullischen Funktionen mit den Exponenten 2, 3, 4, ..., nämlich

$$\frac{x^2}{1.2} = \pi x - 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1 - \cos k x}{k^2},$$

und sei noch abkürzend, wie gebräuchlich, bezeichnet

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^m} = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \cdots \text{in inf.} = S_m,$$

so werden

$$\frac{x^2}{1.2} = \pi . x - 2 S_2 + 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos k x}{k^2}.$$

$$\frac{x^3}{3!} = \pi \cdot \frac{x^2}{2!} - 2\,S_2\,x + 2\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin k\,x}{k^3}.$$

— — — — — — — — — — — — —

$$\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \pi \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!} - 2\,S_2 \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + 2\,S_4 \frac{x^{2m-3}}{(2m-3)!} - + \cdots\cdots$$

$$+ 2(-1)^{m-1} S_{2m-2} \frac{x^3}{3!} + 2(-1)^m S_{2m}\,x + 2(-1)^{m+1} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin k\,x}{k^{2m+1}}. \qquad (\alpha)$$

$$\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} = \pi \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} - 2\,S_2 \frac{x^{2m}}{(2m)!} + 2\,S_4 \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} - + \cdots\cdots$$

$$+ 2(-1)^m S_{2m} \frac{x^2}{2!} + 2(-1)^{m+1} S_{2m+2} + 2(-1)^{m+2} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos k\,x}{k^{2m+2}}. \qquad (\beta)$$

Beide gelten für alle Werte von $x = 0$ bis $x = 2\pi$; m darf gehen von 0, 1, 2, ...; eine Ausnahme bildet nur $m = 0$; denn für diesen Wert bleiben die Grenzwerte $x = 0$ und $x = 2\pi$ ausgeschlossen.

Berücksichtigen wir, dass

$$B_m = (2m)! \frac{2}{(2\pi)^{2m}} S_{2m},$$

und multiplizieren wir (α) mit $\frac{(2m)!}{(2\pi)^{2m+1}}$ und (β) mit $\frac{(2m+1)!}{(2\pi)^{2m+2}}$, so werden

$$\frac{2(-1)^{m+1}(2m)!}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin k\,x}{k^{2m+1}} = \frac{\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m+1}}{2m+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m}$$

$$+ \frac{1}{2}\binom{2m}{1} B_1 \left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m-1} - + \cdots\cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m}{2m-1} B_m \left(\frac{x}{2\pi}\right).$$

$$\frac{2(-1)^m(2m+1)!}{(2\pi)^{2m+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos k\,x}{k^{2m+2}} = \frac{\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m+2}}{2m+2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m+1}$$

$$+ \frac{1}{2}\binom{2m+1}{1} B_1 \left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m} - + \cdots\cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m+1}{2m-1} B_m \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2$$

$$+ \frac{(-1)^m}{2m+2} B_{m+1}.$$

In diesen beiden letzten Gleichungen ersetzt Raabe $\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ durch x und führt die Beziehungen (2) und (3) ein; dann werden

$$B''(x) = \frac{2(-1)^{m-1}}{(2\pi)^{2m+1}}(2m)! \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{k^{2m+1}} \quad (4)$$

$$B'(x) = \frac{2(-1)^{m}}{(2\pi)^{2m+2}}(2m+1)! \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{k^{2m+2}} - \frac{(-1)^{m}}{2m+2} B_{m+1}. \quad (5)$$

Durch obige Substitution hat sich aber das Gültigkeitsgebiet verkleinert; die Beziehungen (4) und (5) gelten nur noch für $0 < x < 1$, inklusive Grenzen, wenn der Fall $m = 0$ ausgeschlossen wird.

Aus diesen ziemlich komplizierten Formeln leitet Raabe die Mehrzahl der Eigenschaften der Bernoullischen Funktion ab, weshalb seine Ableitungen oft etwas lang und umständlich werden.

Da wir zu spätern Vergleichungen noch die Bernoullische Funktion mit dem Exponenten $(2m-1)$ nötig haben, so geben wir Raabes Definitionsformel für dieselbe, nämlich

$$B'(z) = \frac{z^{2m}}{2m} - \frac{1}{2} z^{2m-1} + \frac{1}{2}\binom{2m-1}{1} B_1 z^{2m-2} - + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + \frac{(-1)^{m-2}}{2m-2}\binom{2m-1}{2m-3} B_{m-1} z^2. \quad (6)$$

§ 2. Die Derivierten der Bernoullischen Funktion.

A. Die einfachen Differentialquotienten.

Wir können dieselben aus den Definitionsgleichungen (2) und (3), oder viel einfacher aus (4) und (5) auf folgende Weise finden:

1. *Für die ungerade Bernoullische Funktion* wird nach (2)

$$\frac{\partial}{\partial z} B'(z) = \frac{2m+2}{2m+2} z^{2m+1} - \frac{1}{2}(2m+1) z^{2m}$$
$$+ \frac{1}{2}\binom{2m+1}{1} B_1 2m \cdot z^{2m-1} - + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m+1}{2m-1} B_m 2z$$
$$= (2m+1)\left\{ \frac{z^{2m+1}}{2m+1} - \frac{1}{2} z^{2m} + \frac{1}{2}\binom{2m}{1} B_1 z^{2m-1} \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}\binom{2m}{3} B_2 z^{2m-3} + - \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m}{2m-1} B_m z \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} B'(z) = (2m+1) B''(z). \quad (7)$$

2. Für *die gerade Bernoullische Funktion* bedienen wir uns der Formel (3); es wird

$$\frac{\partial}{\partial x} B''(z) = z^{2m} - \frac{2m}{2} z^{2m-1} + \frac{1}{2}\binom{2m}{1} B_1 (2m-1) z^{2m-2}$$
$$- \frac{1}{4}\binom{2m}{3} B_2 (2m-3) z^{2m-4} + - \cdots + \frac{(-1)^{m-2}}{2m-2}\binom{2m}{2m-3} B_{m-1} z^2$$
$$+ \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m}{2m-1} B_m$$
$$= 2m \left\{ \frac{z^{2m}}{2m} - \frac{1}{2} z^{2m-1} + \frac{1}{2}\binom{2m-1}{1} z^{2m-2} B_1 \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}\binom{2m-1}{3} B_2 z^{2m-4} + - \cdots + \frac{(-1)^{m-2}}{2m-2}\binom{2m-1}{2m-3} B_{m-1} z^2 \right\}$$
$$+ (-1)^{m-1} B_m$$

$$\frac{\partial}{\partial z} B''(z) = 2m \,.\, 'B(z) + (-1)^{m-1} B_m. \tag{8}$$

Es tritt hier eine Komplikation durch Hinzutritt einer Bernoullischen Zahl auf.

Noch einfacher ergeben sich dieselben Formeln aus (4) und (5), wie ersichtlich ist aus

$$\frac{\partial}{\partial z} B'(z) = \frac{2(-1)^m (2m+1)!}{(2\pi)^{2m+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} - 2k\pi \cdot \frac{\sin 2k\pi z}{k^{2m+2}}$$
$$= \frac{2(-1)^{m+1} (2m)! (2m+1)}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin 2k\pi z}{k^{2m+1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} B'(z) = (2m+1) B''(z). \tag{7}$$

Analog wird

$$\frac{\partial}{\partial x} B''(z) = \frac{2(-1)^{m+1} (2m)!}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} 2k\pi \cdot \frac{\cos 2k\pi z}{k^{2m+1}}$$
$$= \frac{2(-1)^{m-1} (2m-1)! \, 2m}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi z}{k^{2m}}.$$

Ziehen wir die Formeln (5) und (6) in Betracht, so wird dieses zu

$$\frac{\partial}{\partial z} B''(z) = 2m \,.\, 'B(z) + (-1)^{m-1} B_m. \tag{8}$$

B. Die wiederholten Differentialquotienten.

Da Raabe den Exponenten der Funktion nicht, oder nur ungenügend andeutet, so lassen sich die wiederholten Ableitungen nicht direkt durch die Bernoullische Funktion, wohl aber durch trigonometrische Summenformeln darstellen; wäre bei dem Funktionszeichen der Exponent berücksichtigt worden, so könnten die Derivierten mit Leichtigkeit angegeben werden.

Durch successives Differenzieren der Beziehungen (4) und (5) gelangen wir zu folgenden einfachen Gleichungen, wenn man symbolisch setzt

$$B_{2r} = (2r)^{te} \text{ Ableitung von } B$$

$$B''_{2r-1}(z) = \frac{2(-1)^{m+r}(2m)!}{(2\pi)^{2m-2r+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi z}{k^{2m-2r+2}} \tag{9}$$

$$B'_{2r}(z) = \frac{2(-1)^{m+r}(2m+1)!}{(2\pi)^{2m-2r+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi z}{k^{2m-2r+2}} \tag{10}$$

C. Einfache Integralformeln.

Aus den Gleichungen (7) und (8) resultieren durch Multiplikation mit dz und Integration zwischen den Grenzen 0 und z

$$\int_0^z B''(z)\,dz = \frac{B'(z)}{2m+1} \qquad \text{und} \tag{11}$$

$$\int_0^z B(z)\,dz = \frac{B''(z)}{2m} + \frac{(-1)^m B_m}{2m} z. \tag{12}$$

Führen wir dieselben Operationen an den Formeln (4) und (5) aus, so erhalten wir zwei weitere Integralformeln einfachster Art, wenn als obere Grenze $z = 1$ gewählt wird; denn es werden

$$\int_0^1 B''(z)\,dz = \frac{2(-1)^{m+1}(2m)!}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{2m+1}} \int_0^1 \sin 2k\pi z\,dz.$$

$$\int_0^1 B'(z)\,dz = \frac{2(-1)^m(2m+1)!}{(2\pi)^{2m+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{2m+2}} \int_0^1 \cos 2k\pi z\,dz$$

$$- \frac{(-1)^m}{2m+2} B_{m+1} \int_0^1 dz.$$

Nun ist $\int_0^1 \sin 2k\pi z\,dz = \int_0^1 \cos 2k\pi z\,dz = 0$, somit

$$\int_0^1 B''(z)\,dz = 0 \quad (13) \quad \text{und} \quad \int_0^1 B'(z)\,dz = \frac{(-1)^{m-1}}{2m+2} B_{m+1}. \quad (14)$$

§ 3. Die Bernoullische Funktion mit inversem und mit negativem Argument.

Raabe widmet diesen beiden Betrachtungen nur wenig Aufmerksamkeit; doch sind die Grundformeln schon bei ihm wie folgt hergeleitet. Er erhöht in Formel (25) seiner so langen Ableitung der Definitionsformel[9]), d. h., in

$$(1+a)^m - ma^{m-1} - a^m + \binom{m}{1}\left\{(1+a)^{m-1} - a^{m-1}\right\}\alpha_1$$
$$+ \binom{m}{2}\left\{(1+a)^{m-2} - a^{m-2}\right\}\alpha_2 + \cdots\cdots + \binom{m}{m-2}\left\{(1+a)^2 - a^2\right\}\alpha_{m-2}$$
$$+ \binom{m}{m-1}\left\{(1+a) - a\right\}\alpha_{m-1} = 0$$

m um die Einheit und beachtet die bekannten Ergebnisse (26) und (29) seiner Schrift und die Definitionsgleichung der Bernoullischen Funktion, wonach

$$\alpha_1 = \frac{1}{2};\ \alpha_{2h+1} = 0;\ \alpha_{2h} = (-1)^{h-1} B_h,$$

wobei h geht von 1 bis ∞, so resultiert die Gleichheit

$$B(1+z) - B(z) = z^m. \quad (15)$$

Ersetzen wir in der ursprünglichen Formel (1) z durch (—z), so wird

$$B(-z) = \frac{(-z)^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{2}(-z)^m + \frac{1}{2}\binom{m}{1} B_1 (-z)^{m-1}$$
$$- \frac{1}{4}\binom{m}{2} B_2 (-z)^{m-3} + - \cdots\cdots$$

$$(-1)^m B(-z) = -\frac{z^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{2} z^m - \frac{1}{2}\binom{m}{1} B_1 z^{m-1}$$
$$+ \frac{1}{4}\binom{m}{2} B_2 z^{m-3} - + \cdots\cdots$$

$$B(z) = \frac{z^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{2} z^m + \frac{1}{2} \binom{m}{1} B_1 z^{m-1} - \frac{1}{4} \binom{m}{2} B_2 z^{m-3} + - \cdots\cdots$$

$$B(z) + (-1)^m B(-z) = -z^m. \tag{16}$$

Spezialisieren wir diese letzte Beziehung auf die gerade und ungerade Bernoullische Funktion, so erhalten wir

$$B''(-z) = -B''(z) - z^{2m} \quad \text{und} \quad B'(-z) = B'(z) + z^{2m+1}. \tag{16a}$$

Addieren wir die Formeln (15) und (16), so erkennen wir, dass

$$B(1+z) + (-1)^m B(1-z) = 0. \tag{17}$$

Aus der letzten Gleichung ergeben sich zwei Beziehungen, die uns über die geraden und ungeraden Bernoullischen Funktionen nähern Aufschluss geben. Je nachdem m gerade oder ungerade, wird, wenn wir vorher z durch (—z) ersetzen,

$$B(1-z) + (-1)^m B(z) = 0. \tag{17a}$$

$$B''(1-z) = -B''(z); \quad B'(1-z) = B'(z). \tag{17b}$$

Für $z = 0$ folgt aus (15) $B(1) = B(0)$, und da laut Definitionsgleichung $B(0) = 0$, so wird

$$B(0) = B(1) = 0. \tag{17c}$$

Ist der Exponent gerade und $z = \frac{1}{2}$, so entsteht nach (17b)

$$B''\left(\frac{1}{2}\right) = -B''\left(\frac{1}{2}\right),$$

und dies kann nur Null sein; somit ist

$$B(0) = B\left(\frac{1}{2}\right) = B(1) = 0. \tag{17d}$$

Es sind dies alles Resultate, die uns bei der Diskussion der Bernoullischen Funktion gute Dienste leisten werden.

Später[10]) leitet Raabe dieselben Eigenschaften aus unsern Formeln (4) und (5) ab. Er ersetzt in (4) z durch (1—z); dann wird

$$B''(1-z) = \frac{2(-1)^{m+1}(2m)!}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin 2k\pi(1-z)}{k^{2m+1}}.$$

Da aber $\sin 2k\pi(1-z) = -\sin 2k\pi z$, so wird

$$B''(1-z) = \frac{-2(-1)^{m+1}(2m)!}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin 2k\pi z}{k^{2m+1}}, \text{ also}$$

$$B''(1-z) = -B''(z).^{11}) \qquad (17^b)$$

Desgleichen wird

$$B'(1-z) + \frac{(-1)^m}{m+2} B_{m+1} = \frac{2(-1)^m(2m+1)!}{(2\pi)^{2m+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi(1-z)}{k^{2m+2}}.$$

Da $\cos 2k\pi(1-z) = \cos 2k\pi z$, folgt

$$B'(1-z) + \frac{(-1)^m}{m+2} B_{m+1} = \frac{2(-1)^m(2m+1)!}{(2\pi)^{2m+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi z}{k^{2m+2}}$$

$$= B'(z) + \frac{(-1)^m}{m+2} B_{m+1}, \text{ somit}$$

$$B'(1-z) = B'(z).^{11}) \qquad (17^b)$$

Dass die Funktion B(z) bei der Annahme eines ganzen, positiven Exponenten m die Summe der m^{ten} Potenzen aller Zahlen 1 bis (z—1) darstellt, kann nun gestützt auf die schon gefundenen Beziehungen leicht gezeigt werden. Zum ersten Mal sind solche Reihensummierungen von Jakob Bernoulli *allgemein* gelöst worden, der in seinem für die Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung so wichtigen Werke «ars conjectandi» 1713 mit Hülfe der von ihm eingeführten Bernoullischen Zahlen, von denen er die 5 ersten berechnet[12]), solche Summierungen vornimmt. Vor ihm haben verschiedene Mathematiker wohl spezielle Potenzreihen summiert; der Engländer Wallis summierte die vierten, fünften und sechsten Potenzen[13]); auch Faulhaber führte in seiner «academia algebrae» 1631 solche Operationen aus[14]); aber Jakob Bernoulli[15]) gebührt das Verdienst, diese Aufgabe allgemein gelöst zu haben.

Ganz einfach lässt sich diese Aufgabe durch Anwendung der Bernoullischen Funktion ausführen. Wir gehen von Formel (15) aus, erhöhen successive das Argument z je um die Einheit und erhalten, wenn wir schliesslich alle diese Gleichungen addieren und z um k Einheiten fortschreitet,

$$B(k+z) = B(z) + z^m + (1+z)^m + (2+z)^m + \cdots + (k-1+z)^m. \qquad (18)$$

Daraus geht für $z = 0$ die gewünschte Summationsformel von Jakob Bernoulli hervor, nämlich

$$B(k) = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots\cdots + (k-1)^m. \qquad (18^a)$$

Eine weitere wichtige Formel ergibt sich aus (17^b). Ersetzen wir darin z der Reihe nach durch $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$, addieren dann alle diese Gleichungen und dividieren, da jedes Glied doppelt auftritt, durch 2, so folgt für die gerade Bernoullische Funktion

$$B''\left(\frac{1}{n}\right) + B''\left(\frac{2}{n}\right) + B''\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots\cdots + B''\left(\frac{n-1}{n}\right) = 0. \qquad (\alpha)$$

Setzen wir weiter für z wieder successive die Werte $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ in (18) ein, so wird für die gerade Bernoullische Funktion

$$B''\left(k + \frac{1}{n}\right) = B''\left(\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}\right)^{2m} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2m} + \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{2m} + \cdots\cdots + \left(k-1+\frac{1}{n}\right)^{2m}$$

$$B''\left(k + \frac{2}{n}\right) = B''\left(\frac{2}{n}\right) + \left(\frac{2}{n}\right)^{2m} + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2m} + \left(2 + \frac{2}{n}\right)^{2m} + \cdots\cdots + \left(k-1+\frac{2}{n}\right)^{2m}$$

$$B''\left(k + \frac{3}{n}\right) = B''\left(\frac{3}{n}\right) + \left(\frac{3}{n}\right)^{2m} + \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2m} + \left(2 + \frac{3}{n}\right)^{2m} + \cdots\cdots + \left(k-1+\frac{3}{n}\right)^{2m}$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$B''\left(k + \frac{n-1}{n}\right) = B''\left(\frac{n-1}{n}\right) + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2m} + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right)^{2m} + \left(2 + \frac{n-1}{n}\right)^{2m} + \cdots\cdots + \left(k-1+\frac{n-1}{n}\right)^{2m}$$

$$^{16})\ B''(k) = \left(\frac{n}{n}\right)^{2m} + \left(1 + \frac{n}{n}\right)^{2m} + \left(2 + \frac{n}{n}\right)^{2m} + \cdots\cdots + \left(k-2+\frac{n}{n}\right)^{2m}.$$

Addieren wir alle diese Gleichungen, so liefert die erste Kolonne der rechten Seite gemäss (α) Null; sämtliche übrigen Potenzen mit

dem Exponenten $(2m)$, also von $\left(\frac{1}{n}\right)^{2m}$ bis zu $\left(k-2+\frac{n}{n}\right)^{2m}$ lassen sich gestützt auf (18^a) darstellen durch $\frac{1}{n^{2m}} B''(nk)$; deshalb wird

$$B''(k)+B''\left(k+\frac{1}{n}\right)+B''\left(k+\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+B''\left(k+\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n^{2m}} B''(nk). \qquad (19)$$

Raabe weist dann nach, dass diese Formel gilt für $k =$ beliebig rational gebrochen und positiv, dann für alle irrationalen positiven Werte von k, schliesslich zeigt er, dass dieselbe auch für negative reelle Werte von k die Gültigkeit nicht verliert.[17])

Um den entsprechenden Satz für die ungerade Bernoullische Funktion zu erhalten, verfährt er wie folgt: Ausgehend von (7), wird

$$B'_1(z) = (2m+1) B''(z).^{18})$$

Er ersetzt darin z durch $\left(z+\frac{k}{n}\right)$, summiert beidseitig von $k = 0$ bis $k = n-1$ und erhält unter Anwendung von (19)

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} B'_1\left(z+\frac{k}{n}\right) = (2m+1) \sum_{k=0}^{k=n-1} B''\left(z+\frac{k}{n}\right) = \frac{(2m+1)}{n^{2m}} B''(nz).$$

Nach (7) ist aber auch $B'_1(nz) = (2m+1) B''(nz)$, daher

$$\frac{1}{n^{2m}} B'_1(nz) = \sum_{k=0}^{k=n-1} B'_1\left(z+\frac{k}{n}\right).$$

Wird beidseitig mit dz multipliziert und in Beziehung auf z integriert, so folgt

$$\frac{1}{n^{2m+1}} B'(nz) = \sum_{k=0}^{k=n-1} B'\left(z+\frac{k}{n}\right) + M, \qquad (\beta)$$

wo M als Integrationskonstante von z unabhängig ist. Um diese zu bestimmen, setzen wir $z = 0$, dann wird

$$0 = M + \sum_{k=0}^{k=n-1} B'\left(\frac{k}{n}\right).$$

$$M = -\left\{ B'\left(\frac{1}{n}\right) + B'\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots\cdots + B'\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}.$$

Durch Vergleichung zweier für dasselbe bestimmte Integral gefundener Ausdrücke, erhält Raabe dann

$$B'\left(\frac{1}{n}\right)+B'\left(\frac{2}{n}\right)+B'\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots\cdots+B'\left(\frac{n-1}{n}\right)$$
$$=\frac{(-1)^{m-1}}{2m+2}\left\{n-\frac{1}{n^{2m+1}}\right\}B_{m+1}.$$

Setzt er die erhaltenen Werte in die vorhin erhaltene Formel (3) ein, so wird

$$B'(z)+B'\left(z+\frac{1}{n}\right)+B'\left(z+\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+B'\left(z+\frac{n-1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{n^{2m+1}}B'(nz)-\frac{(-1)^m\left\{n^{2m+2}-1\right\}}{(2m+2)\,n^{2m+1}}B_{m+1}, \qquad (20)$$

eine Formel, die gleich wie (19) für sämtliche reelle Werte von z und für ganze und positive Werte von n identisch Bestand hat.

Diese letzten zwei Beziehungen zeigen, wie schon Raabe andeutet, eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Gauss'schen Fundamentalsatz in der Theorie der Gamma-Funktion

$$\Gamma(a)\,.\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right).\,\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)$$
$$=\Gamma(na)\,.\,n^{-na+\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}},$$

nur finden sich hier alles Produkte, während bei der Bernoullischen Funktion Summen auftreten.[19]) Es wäre wahrscheinlich sehr interessant, sämtliche Analogien beider Funktionen herauszusuchen; doch würde uns das zu weit von unserem Thema wegleiten.

§ 4. Diskussion der Bernoullischen Funktion.

Raabe diskutiert seine aufgestellten Definitionsformeln in keiner einer Arbeiten; doch müssen wir auf diese Frage auch bei dieser Definition eintreten, damit wir später mit den andern vergleichen können. Wir kommen am besten zum Ziel, wenn wir bei den Bernoullischen Funktionen mit niedrigen Exponenten anfangen und allmählich zu denjenigen mit höhern fortschreiten.

Setzt man für m der Reihe nach 0, 1, 2, 3, ... , so erhalten die acht ersten Bernoullischen Funktionen folgende Werte:

$$B_0(z) = z.$$

$$B_1(z) = \frac{1}{2} z\,(z-1).$$

$$B_2(z) = \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z.$$

$$B_3(z) = \frac{1}{4} z^4 - \frac{1}{2} z^3 + \frac{1}{4} z^2.$$

$$B_4(z) = \frac{1}{5} z^5 - \frac{1}{2} z^4 + \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{30} z.$$

$$B_5(z) = \frac{1}{6} z^6 - \frac{1}{2} z^5 + \frac{5}{12} z^4 - \frac{1}{12} z^2.$$

$$B_6(z) = \frac{1}{7} z^7 - \frac{1}{2} z^6 + \frac{1}{2} z^5 - \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{42} z.$$

$$B_7(z) = \frac{1}{8} z^8 - \frac{1}{2} z^7 + \frac{7}{12} z^6 - \frac{7}{24} z^4 + \frac{1}{12} z^2.$$

Für uns sind diejenigen Werte am wichtigsten, für welche z innerhalb des Intervalles 0 und 1 liegt; für z ausserhalb nehmen die Funktionen rasch grosse Werte an; auch können diese Werte aus den innerhalb dieses Intervalles liegenden berechnet werden. Die Tabelle I am Schlusse dieser Arbeit gibt die Werte der sechs ersten Bernoullischen Funktionen für verschiedene z von -3 bis $+4$.

1. $B_0(z) = z$. Diese Funktion stellt somit eine Gerade dar, die durch den Ursprung der Zahlenebene geht und den Winkel der Koordinatenaxen halbiert, indem sie durch den ersten und dritten Quadranten läuft.

2. $B_1(z) = \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{2} z$. Am meisten interessieren uns die, Maximal- und Minimalwerte der Funktion. Nach der bekannten Regel aus der Theorie der Maxima und Minima entwickelter Funktionen erhalten wir hier ein Minimum für $z = \frac{1}{2}$. Es ist leicht einzusehen dass von $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ diese Funktion fortwährend abnimmt und negativ bleibt; der kleinste Wert muss somit $B_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$ sein. Von $z = \frac{1}{2}$ bis $z = 1$ beginnt die Funktion fortwährend grösser zu werden, um für $z = 1$ den Nullwert zu erreichen, von wo an die

Funktion weiter zunimmt. Der Anblick der Gleichung sagt uns überhaupt sofort, dass diese Funktion eine Parabel darstellt, die durch den Ursprung geht.

3. $B_2 = \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z$. Wir erhalten ein Minimum für $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}$ und ein Maximum für $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}$; zudem wird diese Funktion für $z = \frac{1}{2}$ zu 0; daher folgt:

Zwischen $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ ist diese Funktion stets positiv und weist ein Maximum auf bei $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}$; im Intervall von $z = \frac{1}{2}$ bis $z = 1$ ist dieselbe negativ mit dem berechneten Minimum bei $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}$. Wie wir später sehen werden, stellt diese Gleichung eine Parabel höherer Ordnung dar.

4. $B_3 = \frac{1}{4} z^4 - \frac{1}{2} z^3 + \frac{1}{4} z^2$. Die Rechnung ergibt zwei Minima, bei $z = 0$ und $z = 1$ und ein Maximum bei $z = \frac{1}{2}$. Diese Funktion ist im ganzen Zwischenraum von 0 bis 1 positiv und besitzt eine Maximalstelle für $z = \frac{1}{2}$, wofür $B_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{64}$ wird. Es stellt dieselbe wieder eine Parabel höherer Ordnung dar; diese geht durch den Nullpunkt, der aber kein Doppelpunkt ist; gleichwohl ist die Abszissenaxe Doppeltangente; sie berührt in $z = 0$ und $z = 1$.

Bei der Diskussion der höhern Bernoullischen Funktionen können wir nicht mehr analog verfahren, da wir auf Gleichungen vierten und noch höhern Grades gelangen; wir begnügen uns hier mit der graphischen Darstellung der zwei folgenden, höhern Bernoullischen Funktionen. Bei einer später zu untersuchenden Definition der Bernoullischen Funktion werden wir einen ausreichenden Weg der Diskussion der höhern Bernoullischen Funktionen kennen lernen.[20])

§ 5. Entwicklung der Bernoullischen Funktion in trig. Reihen.

Schon bei der Ableitung der Definitionsgleichung gelangte Raabe zu Reihen, welche die Bernoullischen Funktionen darstellen, ebenso

bei der Herleitung der Differentialquotienten. Wir verweisen hier nur auf die diesbezüglichen Formeln (4), (5), (9) und (10). Dieselben zeigen viel Ähnlichkeit mit den Reihenentwicklungen der übrigen Definitionen der Bernoullischen Funktion.

§ 6. Die Bernoullische Funktion als bestimmtes Integral.

Es handelt sich nicht darum, eine erschöpfende Darstellung aller Integrale der Bernoullischen Funktion zu geben; wir wählen nur die zum Vergleich mit den andern Definitionen wichtigen.

Durch Multiplikation mit $\cos 2\,r\,\pi\,z\,dz$, resp. $\sin 2\,r\,\pi\,z\,dz$ und Integration zwischen den Grenzen 0 und 1 entstehen aus den Formeln (9) und (10) unter der Voraussetzung, dass r und k ganze Zahlen seien, die vier leicht herzuleitenden Formeln.[21])

$$\int_0^1 B''(z)\cos 2\,r\,\pi\,z\,dz = 0. \tag{21}$$

$$\int_0^1 B''(z)\sin 2\,r\,\pi\,z\,dz = \frac{(-1)^{m-1}\Gamma(2\,m+1)}{(2\,\pi\,r)^{2\,m+1}}. \tag{22}$$

$$\int_0^1 B'(z)\sin 2\,r\,\pi\,z\,dz = 0. \tag{23}$$

$$\int_0^1 B'(z)\cos 2\,r\,\pi\,z\,dz = \frac{(-1)^{m}\Gamma(2\,m+2)}{(2\,\pi\,r)^{2\,m+2}}. \tag{24}$$

Multiplizieren wir (4) mit $B''(z)\,dz$ und integrieren zwischen 0 und 1, so folgt, da die Doppelsumme durch die verschwindenden Integrale zur einfachen Summe wird,

$$\int_0^1 B''^2(z)\,dz = \frac{4\,(2\,m)!^2}{(2\,\pi)^{4\,m+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{4m+2}} \int_0^1 \sin^2 2\,k\,\pi\,z\,dz.$$

Der Wert des Integrales rechts ist $\frac{1}{2}$; somit

$$\int_0^1 B''^2(z)\,dz = \frac{2\,(2\,m)!^2}{(2\,\pi)^{4\,m+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{4\,m+2}} = \frac{2\,(2\,m)!^2}{(2\,\pi)^{4\,m+2}}\, S_{4\,m+2}.$$

Wird $S_{4\,m+2}$ durch Bernoullische Zahlen ausgedrückt, so resultiert

$$\int_0^1 B''^2(z)\,dz = \frac{\Gamma(2m+1)}{(2m+1)(2m+2)\ldots\ldots(4m+2)}\,B_{2m+1}. \qquad (25)$$

Ebenso wird aus (5)

$$\int_0^1 B'^2(z)\,dz = \frac{\Gamma(2m+2)}{(2m+2)(2m+3)\ldots\ldots(4m+4)}\,B_{2m+2} + \left\{\frac{B_{m+1}}{2m+2}\right\}^2. \qquad (26)$$

Mit Zuziehung der Gammafunktion gelangt Raabe zu einer Anzahl bestimmter Integrale, welche durch die Bernoullische Funktion dargestellt werden können.

Bekanntlich ist $\frac{\Gamma(2m+1)}{k^{2m+1}} = \int_0^\infty e^{-ku}\,u^{2m}\,du$. Setzen wir diesen Wert in Formel (4) ein, so wird

$$\frac{1}{2}(-1)^{m+1}(2\pi)^{2m+1}B''(z) = \int_0^\infty \left\{\sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-ku}\sin 2k\pi z\right\} u^{2m}\,du.$$

Da aber $\sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-ku}\sin 2k\pi z = \frac{\sin 2\pi z}{e^u + e^{-u} - 2\cos 2\pi z}$, so wird

$$\int_0^\infty \frac{u^{2m}}{e^u + e^{-u} - 2\cos 2\pi z}\,du = \frac{(-1)^{m+1}(2\pi)^{2m+1}}{2\sin 2\pi z}\,B''(z). \qquad (27)$$

Ebenso wird

$$\int_0^\infty \frac{(\cos 2\pi z - e^{-u})\,u^{2m+1}}{e^u + e^{-u} - 2\cos 2\pi z}\,du = \frac{1}{2}(-1)^m(2\pi)^{2m+2}B'(z) + \frac{1}{2}\frac{(2\pi)^{2m+2}}{2m+2}B_{m+1}. \qquad (28)$$

Durch partielle Integration findet Raabe eine weitere Anzahl von bestimmten Integralen, ausgedrückt durch Bernoullische Zahlen oder Funktionen. Ebenso erhält er noch andere kompliziertere Formeln, wenn er die Summenformeln oder andere zweckmässig gewählte, mit den Bernoullischen Funktionen in Beziehung stehende Ausdrücke in Partialbrüche zerlegt. Alle diese Beziehungen erfordern aber eine ziemlich umständliche Herleitung.[22])

II. Die Bernoullische Funktion nach O. Schlömilch.

§ 7. Herleitung der Definition.

Ausgangspunkt ist die Summation der uns schon bekannten Potenzreihe

$$1^p + 2^p + 3^p + 4^p + \cdots\cdots\cdots + (k-1)^p.$$

Das Problem bietet uns keine Schwierigkeiten, wenn die Fälle für $p = 1$, $p = 2$, $p = 3$, ... successive behandelt werden, d. h., wenn man jeden Fall auf den vorhergehenden zurückführt; eine allgemeine Formel ist dagegen auf diese Weise nicht zu finden, wohl aber durch Differentialrechnung.

Obige Reihe entsteht durch p-malige Differentiation einer andern Reihe, so dass ist

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots\cdots + (k-1)^p = \left\{ D^p \frac{e^{kx}-1}{e^x-1} \right\}_{x=0}^{23)}.$$

Um die Differentiation auszuführen, zerlegen wir die rechte Seite in zwei Faktoren $\frac{x}{e^x-1} \cdot \frac{e^{kx-1}}{x} = \varphi(x) \cdot \psi(x)$; dann wird nach der Regel der Differentiation von Produkten

$$D^p \left\{ \varphi(x)\, \psi(x) \right\}_{x=0} = \varphi(0)\, \psi^p(0) + \binom{p}{1} \varphi'(0)\, \psi^{p-1}(0) + \binom{p}{2} \varphi''(0)\, \psi^{p-2} + \cdots\cdots \quad (\alpha)$$

Zur Berechnung der Werte $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$, ... benutzen wir die bekannte Formel über Bernoullische Zahlen[24])

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{x} + \frac{2^2 B_1}{2!} y - \frac{2^4 B_2}{4!} y^3 + \frac{2^6 B_3}{6!} - + \cdots\cdots,$$

wo $-\pi < y < \pi$.

Durch passende Umänderung, wobei noch $y = \frac{1}{2} x$ gesetzt wird, geht diese Formel über in

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{B_1}{2!} x^2 - \frac{B_2}{4!} x^4 + \frac{B_3}{6!} x^6 - + \cdots\cdots$$

Daraus erhalten wir für $x = 0$ folgendes Wertesystem:

$$\varphi(0) = 1. \qquad \varphi''(0) = B_1.$$
$$\varphi'(0) = -\frac{1}{2}. \qquad \varphi''''(0) = -B_2.$$
$$\varphi'''(0) = 0. \qquad \varphi''''''(0) = B_3.$$
$$\varphi'''''(0) = 0.$$
$$\varphi^{(2m+1)}(0) = 0. \qquad \varphi^{(2m)}(0) = (-1)^{m-1} B_m. \qquad (\beta)$$

Zur Bestimmung von $\psi^p(0)$, $\psi^{p-1}(0)$, ... dient

$$\frac{e^{kx}-1}{x} = k + \frac{k^2}{2!}x + \frac{k^3}{3!}x^2 + \frac{k^4}{4!}x^3 + \cdots\cdots$$

Für $\psi^p(0)$ verschwinden alle Ableitungen, die x enthalten, und

$$\psi^p(0) = \frac{k^{p+1}}{p+1}. \qquad (\gamma)$$

Setzen wir die Werte (β) und (γ) in Formel (α) ein, so folgt gestützt auf eine leicht einzusehende kleine Veränderung

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots\cdots + (k-1)^p = \frac{k^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{2}k^p + \frac{1}{2}\binom{p}{1}B_1 k^{p-1} - \frac{1}{4}\binom{p}{3}B_2 k^{p-3} + \frac{1}{6}\binom{p}{5}B_3 k^{p-5} - + \cdots\cdots$$

Während die linke Seite nur Sinn hat für k als ganzen, positiven Wert, grösser als 1, kann die rechte Seite verallgemeinert werden; wir erhalten dann einen Ausdruck, der eine ganze, rationale Funktion darstellt. Um aber nicht Funktionen $(p+1)^{ten}$ Grades betrachten zu müssen, und um der höchsten Potenz von k oder z, wie allgemein üblich, den Koeffizienten 1 zu verschaffen, ersetzt Schlömilch p durch (n—1), multipliziert mit m und definiert unter Vernachlässigung der linken Seite

$$\varphi(z, n) = z^n - \frac{1}{2}\, n\, z^{n-1} + \binom{n}{2}B_1 z^{n-2} - \binom{n}{4}B_2 z^{n-4} + \binom{n}{6}B_3 z^{n-6} - + \cdots\cdots \qquad (1)$$

als die «*Bernoullische Funktion n^ter Ordnung.*»

Die Herleitung dieser Fundamentalbeziehung verlangt, dass rechter Hand kein von z freier Term vorkommen darf; es ist dies eine Eigenschaft, welche die Allgemeinheit dieser Definition wesentlich einschränkt.[25])

Durch Vergleich erhalten wir folgende Definitionsformeln, welche die Bernoullischen Funktionen als Nullwerte von Differentialquotienten darstellen

$$\varphi(z, n) = n\, D_x^{n-1}\left\{\frac{e^{zx}-1}{e^x-1}\right\}_{x=0} = D_x^n\left\{x\,\frac{e^{zx}-1}{e^x-1}\right\}_{x=0}. \qquad (2)$$

Ausgehend von diesen beiden Hauptgleichungen hat Schlömilch die verschiedenen Eigenschaften der Bernoullischen Funktion genauer untersucht. Diese Definition stimmt nicht ganz mit derjenigen von Raabe überein.[25]) Die Resultate, zu denen Schlömilch gelangt, entsprechen denjenigen, die Raabe gefunden. Schlömilch ist der erste, welcher gezeigt hat, dass die Bernoullischen Funktionen Differentialquotienten sind; dass sich dadurch die Darstellung hübscher gestaltet, ist nicht zu bezweifeln; nur ist das Operieren damit hie und da ziemlich umständlich.

§ 8. Die Derivierten der Bernoullischen Funktion.

A. Die einfachen Differentialquotienten.

Um die Eigenschaften der Ableitungen von $\varphi(z, n)$ zu erfahren, differenzieren wir die gebrochene Funktion $\frac{e^{zx}-1}{e^x-1}$ $(m-1)$-mal nach x und einmal nach z und erinnern uns, dass die Reihenfolge der Operationen beliebig ist; demnach wird

$$D_z\, D_x^{n-1}\left\{\frac{e^{zx}-1}{e^x-1}\right\} = D_x^{n-1}\left\{x\,\frac{e^{zx}-1}{e^x-1} + \frac{x}{e^x-1}\right\}$$

$$= D_x^{n-1}\left\{\frac{e^{zx}-1}{e^x-1} + \varphi(x)\right\}.$$

Dies liefert für $x = 0$ unter Berücksichtigung der Definitionsgleichungen (2) $\qquad D_z\frac{\varphi(z,n)}{n} = \varphi(z,n-1) + \varphi^{(n-1)}(0).$

Trennen wir die gerade und die ungerade Bernoullische Funktion, so folgt unter Anwendung früherer Beziehungen

$$\frac{\partial}{\partial z}\,\varphi(z, 2m) = 2m\,.\,\varphi(z, 2m-1) \qquad \text{und} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\,\varphi(z, 2m+1) = (2m+1)\left\{\varphi(z, 2m) + (-1)^{m-1}\,B_m\right\}. \qquad (4)$$

Diese beiden Formeln entsprechen ganz denjenigen von Raabe. Infolge der etwas andern Definitionsgleichung zeigt hier die Ableitung der ungeraden Bernoullischen Funktion den Zusatz einer Bernoullischen Zahl, während bei Raabe die gerade.

B. Die wiederholten Differentialquotienten.

Schlömilch gibt dieselben nicht; doch sind sie durch successive Differentiation einfach zu finden; es resultieren, ausgehend von (3) und (4), folgende Formeln

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^{2\lambda}}{\partial z^{2\lambda}}\varphi(z,2m) = (2\lambda)!\binom{2m}{2\lambda}\left\{\varphi(z,2m-2\lambda)+(-1)^{m-\lambda-1}B_{m-\lambda}\right\}.\\
&\frac{\partial^{2\lambda+1}}{\partial z^{2\lambda+1}}\varphi(z,2m) = (2\lambda+1)!\binom{2m}{2\lambda+1}\varphi(z,2m-2\lambda-1).\\
&\frac{\partial^{2\lambda}}{\partial z^{2\lambda}}\varphi(z,2m+1) = (2\lambda)!\binom{2m+1}{2\lambda}\varphi(z,2m+1-2\lambda).\\
&\frac{\partial^{2\lambda+1}}{\partial z^{2\lambda+1}}\varphi(z,2m+1) = (2\lambda+1)!\binom{2m+1}{2\lambda+1}\left\{\varphi(z,2m-2\lambda)\right.\\
&\qquad\qquad\left.+(-1)^{m-\lambda-1}B_{m-\lambda}\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Die wiederholten Ableitungen der Bernoullischen Funktion sind wieder Bernoullische Funktionen; nur treten hier noch Faktoren und Bernoullische Zahlen dazu, welche die Darstellung etwas komplizieren.

C. Einfache Integralformen.

Multiplizieren wir die Formeln (3) und (4) mit dz und integrieren zwischen den Grenzen 0 und z, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^z \varphi(z,2m-1)\,dz = \frac{\varphi(z,2m)}{2m};\quad m>1 \qquad \text{und}\\
&\int_0^z \varphi(z,2m)\,dz = \frac{\varphi(z,2m+1)}{2m+1}+(-1)^m\,B_m\,.\,z.
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Die Integrale der Bernoullischen Funktion, nach Schlömilch definiert, sind wieder gleiche Funktionen, dividiert durch eine bestimmte Zahl; für die gerade Funktion tritt noch ein Produkt einer Bernoullischen Zahl mit einer Variabelen auf, das je nach dem Exponenten m entweder addiert oder subtrahiert wird.

Für die obere Grenze $z = \frac{1}{2}$ erhalten wir unter Anwendung der im folgenden § 9 zu beweisenden Formeln

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(z, 2m-1)\,dz = \frac{(-1)^m \left\{2^{2m}-1\right\}}{m\,2^{2m}} B_m \quad \text{und} \\ &\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(z, 2m)\,dz = (-1)^m \frac{1}{2} B_m. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

§ 9. Die Funktion mit inversem Argument.

Wir ersetzen in $\frac{e^{zx}-1}{e^x-1}$ die Grösse z durch 1—z; dann geht durch leichte Umwandlung dieses über in $1 - \frac{e^{-zx}-1}{e^{-x}-1}$, und es wird

$$D_x^n \left\{ x \frac{e^{(1-z)x}-1}{e^x-1} \right\}_{x=0} = -D_x^n \left\{ x \frac{e^{-zx}-1}{e^{-x}-1} \right\}_{x=0}.$$

Ersetzen wir x durch $-\xi$, so wird

$$D_x^n \left\{ x \frac{e^{(1-z)x}-1}{e^x-1} \right\}_{x=0} = (-1)^n D_\xi^n \left\{ \xi \frac{e^{z\xi}-1}{e^\xi-1} \right\}_{\xi=0}.$$

Somit folgt nach Definitionsgleichung

$$\varphi(1-z, n) = (-1)^n \varphi(z, n). \tag{8}$$

Daraus ist ersichtlich, dass die Bernoullische Funktion für $z = \frac{1}{2}$ bis $z = 1$ in entgegengesetzter Reihenfolge dieselben Werte annimmt, welche sie von $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ hatte und zwar mit dem nämlichen oder mit entgegengesetztem Vorzeichen, je nachdem die Funktion von gerader oder ungerader Ordnung ist, was die Diskussion erleichtert.

Für die gerade Funktion folgt aus (8) und der Definitionsgleichung (1) für $x = 0$, dass

$$\varphi(1, 2m) = \varphi(0, 2m) = 0. \tag{9}$$

Für die ungerade Funktion wird für $z = 0$ und $z = \frac{1}{2}$, wie leicht einzusehen ist,

$$\varphi(1, 2m+1) = \varphi\left(\frac{1}{2}, 2m+1\right) = \varphi(0, 2m+1) = 0. \qquad (10)$$

Wir suchen nun einen Wert für $\varphi\left(\frac{1}{2}, 2m\right)$. Dazu ersetzen wir in der Definitionsformel (2) n durch $2m$ und z durch $\frac{1}{2}$; dann wird

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, 2m\right) = D_x^{2m}\left\{x\frac{e^{\frac{x}{2}}-1}{e^x-1}\right\}_{x=0} = 2\,D_x^{2m}\left\{\frac{\frac{1}{2}x}{e^{\frac{x}{2}}+1}\right\}_{x=0}.$$

Es ist identisch gleich

$$\frac{\frac{1}{2}x}{e^{\frac{x}{2}}+1} = \frac{\frac{1}{2}x}{e^{\frac{x}{2}}-1} - \frac{x}{e^x-1} = \varphi\left(\frac{1}{2}x\right) - \varphi(x).$$

Durch $2m$-malige Differentiation nach x und Multiplikation mit 2 erhalten wir für $x = 0$ unter Berücksichtigung von $\varphi^{(2m)}(0) = (-1)^{m-1} B_m$ die Formel

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, 2m\right) = (-1)^m \frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} B_m. \qquad (11)$$

Diese Berechnungen der geraden und ungeraden Bernoullischen Funktion für verschiedene Argumente sind nur Spezialfälle eines allgemeinen Satzes, den Schlömilch wie folgt erhält. Er setzt in der Definitionsgleichung (2) für das Argument z der Reihe nach z, $\left(z+\frac{1}{k}\right)$, $\left(z+\frac{2}{k}\right)$, ..., $\left(z+\frac{k-1}{k}\right)$, addiert die so erhaltenen Ausdrücke, nimmt $\varphi(x) = \frac{x}{e^x-1}$ aus der Klammer und erhält die Summe

$$S = D_x^n\left\{\left[e^{zx}\left(1 + e^{\frac{x}{k}} + e^{\frac{2x}{k}} + e^{\frac{3x}{k}} + \cdots\cdots + e^{\frac{(k-1)x}{k}}\right) - k\right]\varphi(x)\right\}_{x=0}.$$

Durch Summation der geometrischen Reihe in der Klammer folgt

$$S = D_x^n\left\{\left[e^{zx}\frac{e^x-1}{e^{\frac{x}{k}}-1} - k\right]\varphi(x)\right\}_{x=0}$$

und durch leichte Veränderung, wenn schliesslich $x = k\xi$, wird

$$S = \frac{1}{k^{n-1}} D_\xi^n\left\{\xi\frac{e^{kz\xi}-1}{e^\xi-1}\right\}_{\xi=0} + k\left\{\frac{1}{k^m} - 1\right\}\varphi^m(0).$$

Für $n = gerade = 2m$ wird

$$\varphi(z, 2m) + \varphi\left(z + \frac{1}{k}, 2m\right) + \cdots\cdots + \varphi\left(z + \frac{k-1}{k}, 2m\right)$$
$$= \frac{1}{k^{2m-1}} \left\{\varphi(kz, 2m) + (-1)^m (k^{2m} - 1) B_m\right\}. \quad (12)$$

Für $n = ungerade = (2m + 1)$ folgt

$$\varphi(z, 2m+1) + \varphi\left(z + \frac{1}{k}, 2m+1\right) + \cdots\cdots + \varphi\left(z + \frac{k-1}{k}, 2m+1\right)$$
$$= \frac{1}{k^{2m}} \varphi(kz, 2m+1). \quad (13)$$

Wir sehen hier wieder die Zweispurigkeit der geraden und ungeraden Bernoullischen Funktion.

Setzen wir $z = 0$ und $k = \frac{1}{2}$, so finden wir aus dieser allgemeinen Formel für $\varphi\left(\frac{1}{2}, 2m\right)$, also für die gerade Bernoullische Funktion, den schon früher gefundenen Wert (11). Ebenso lassen sich Ausdrücke finden für

$$\varphi\left(\frac{1}{3}, 2m\right), \quad \varphi\left(\frac{1}{4}, 2m\right) \text{ und } \varphi\left(\frac{1}{6}, 2m\right).$$

Für die ungerade Funktion kommen wir auf diese Weise zu keinen Spezialwerten.

§ 10. Die Funktion mit negativem Argument.

Um diese Funktion zu untersuchen, berechnet Schlömilch vorerst $\varphi(z+1, n)$. Nach Definitionsgleichung (2) wird durch Subtraktion

$$\varphi(z+1, n) - \varphi(z, n) = D_x^n \left\{ x \frac{e^{(z-1)x} - e^{zx}}{e^x - 1} \right\}_{x=0}$$
$$= D_x^n \left\{ x \frac{e^{zx}(e^x - 1)}{e^x - 1} \right\}_{x=0} = D_x^n \left\{ x e^{zx} \right\}_{x=0} = n z^{n-1}.$$
$$\varphi(z+1, n) = \varphi(z, n) + n z^{n-1}. \quad (14)$$

Durch Anwendung von (8) entsteht daraus

$$\varphi(-z, n) = (-1)^n \left\{ \varphi(z, n) + n z^{n-1} \right\}. \quad (15)$$

Es sind dies zwei wichtige Formeln; (14) dient dazu, aus einer Bernoullischen Funktion eine neue Bernoullische Funktion gleichen Grades, aber mit einem um die Einheit erhöhten Argument zu be-

rechnen; (15) wird gebraucht zur Verwandlung einer Bernoullischen Funktion mit negativem Argument in eine solche mit positivem.

Mit Hülfe von (14) findet Schlömilch eine Beziehung zur Darstellung der Werte der Bernoullischen Funktion auch ausserhalb des Intervalles von 0 bis 1. Lässt man nämlich z der Reihe nach die Werte $z+1$, $z+2$, $z+3, \cdots\cdots, (z+k-1)$ annehmen, wo k = positiv und ganz, und addiert dann die so erhaltenen Gleichungen, so wird

$$\varphi(z+k, n) = \varphi(z, n) + n\left\{z^{n-1} + (z+1)^{n-1} + (z+2)^{n-1} + \cdots\cdots + (z+k-1)^{n-1}\right\}. \quad (16)$$

Geben wir hierin dem k einen beliebigen ganzzahligen Wert, so können wir auch höhere Werte der Bernoullischen Funktion, ganze und gebrochene, berechnen, da z nicht ganzzahlig zu sein braucht und wir ja die Bernoullische Funktion im Intervall von 0 bis 1 genau kennen. Diese Formel wird uns die zur graphischen Darstellung der einzelnen Funktionen nötigen Werte liefern, wenn wir nicht vorziehen, solche direkt aus den Definitionsformeln zu berechnen.

Schlömilch verwandelt eine Bernoullische Funktion mit negativem Argument noch durch folgende einfache Formel, die er erhält, indem er in (8) für z den Wert $\left(z + \frac{1}{2}\right)$ setzt, in eine Funktion mit positivem Argument

$$\varphi\left(\frac{1}{2} - z, n\right) = (-1)^n \varphi\left(\frac{1}{2} + z, n\right), \quad (17)$$

die in einigen Fällen gute Dienste leistet. Aus dieser Formel ist auch ersichtlich, dass $\varphi\left(\frac{1}{2} + z, n\right)$ eine gerade oder ungerade Funktion ist, je nachdem n einen geraden oder ungeraden Wert hat. Daraus ist auch $\varphi\left(\frac{1}{2}, n\right)$ als Maximal- oder Minimalwert erkennbar.

Einzelne spezielle Werte, die Schlömilch nicht oder auf ganz andere Weise herleitet, findet *J. Worpitzky* gestützt auf Schlömilchs Definition wie folgt:[26])

1. Berechnung von $\varphi\left(\frac{1}{2}, n\right)$.

Wir ersetzen in (2) z durch $\frac{1}{2}$; dann wird

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, n\right) = 2\,D_x^n\left\{\varphi\left(\frac{x}{2}\right) - \varphi(x)\right\} = -D_x^n \varphi(x)_0 \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}}.$$

Weil $D_x^{2m+1}\varphi(x)_0 = 0$ und $D_x^{2m}\varphi(x)_0 = (-1)^n B_n$, so wird für

$n = ungerade = (2m+1)$ $\quad \varphi\left(\frac{1}{2}, 2m+1\right) = 0$ und für

$n = gerade \quad = 2m$ $\quad \varphi\left(\frac{1}{2}, 2m\right) = (-1)^n \frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} B_n.$ (18)

2. Berechnung von $\varphi\left(\frac{1}{4}, n\right)$.

Es ist identisch $\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x+1} = \frac{e^{\frac{3w}{4}}-1}{e^w-1} - \frac{e^{\frac{w}{4}}-1}{e^w-1}$, wo $w = 2x$, und somit wird nach Definition (2)

$$D_x^{n-1}\left\{\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x+1}\right\}_{x=0} = \frac{2^{n-1}}{n}\left\{\varphi\left(\frac{3}{4}, n\right) - \varphi\left(\frac{1}{4}, n\right)\right\}.$$

Nach (17) ist $\varphi\left(\frac{3}{4}, n\right) = (-1)^n \varphi\left(\frac{1}{4}, n\right)$; daher wird für

$n = gerade \quad = 2m.$ $\quad D_x^{2m-1}\left\{\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x+1}\right\}_{x=0} = 0$ und für

$n = ungerade = (2m+1).$ $\quad D_x^{2m}\left\{\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x+1}\right\}_{x=0}$

$$= -\frac{2^{2m+1}}{2m+1}\varphi\left(\frac{1}{4}, n\right).$$

Ebenso ist identisch

$$D_x^{n-1}\left\{\frac{e^{\frac{x}{4}}-1}{e^x-1}\right\}_{x=0} = \frac{1}{2} D_x^{n-1}\left\{\frac{1}{e^{\frac{x}{4}}+1} + \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}+1} - \frac{e^{\frac{x}{4}}}{e^{\frac{x}{2}}+1}\right\}_{x=0} \quad (\alpha)$$

Es sind $D_x^{n-1}\left\{\frac{e^{\frac{x}{4}}}{e^{\frac{x}{2}}+1}\right\}_{x=0} = \frac{2^{n-1}}{n \cdot 2^{n-1}}\left\{(-1)^n - 1\right\}\varphi\left(\frac{1}{4}, n\right).$

$$D_x^{n-1}\left\{\frac{1}{e^{\frac{x}{4}}+1}\right\}_{x=0} = \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}}\varphi\left(\frac{1}{2}, n\right).$$

$$D_x^{n-1}\left\{\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}+1}\right\}_{x=0} = \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{2}, n\right).$$

Substituieren wir diese letzten drei Werte in (α), so resultiert für $n = 2m$

$$\varphi\left(\frac{1}{4}, 2m\right) = \varphi\left(\frac{1}{2}, 2m\right)\frac{2^{2m-1}+1}{2^{2m}}. \quad (19)$$

Setzen wir in dieser interessanten Beziehung zwischen den Bernoullischen Funktionen mit Argument $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ für $\varphi\left(\frac{1}{2}, 2m\right)$ den früher gefundenen Wert, so erhalten wir

$$\varphi\left(\frac{1}{4}, 2m\right) = (-1)^m \frac{(2^{2m}-1)(2^{2m-1}+1)}{2^{4m-1}}. \qquad (20)$$

§ 11. Diskussion dieser Definition.

Wir könnten natürlich bei dieser Diskussion gleich verfahren wie bei Raabe. Schlömilch geht aber ganz anders vor, und wir wollen uns deshalb an seine Darstellungsweise halten.

Setzen wir für n der Reihe nach 1, 2, 3, ... , so nehmen die acht ersten Bernoullischen Funktionen folgende Werte an:

$$\varphi(z, 1) = z.$$

$$\varphi(z, 2) = z^2 - z = z(z-1).$$

$$\varphi(z, 3) = z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{2}z = z(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right).$$

$$\varphi(z, 4) = z^4 - 2z^3 + z^2 = z^2(z-1)^2.$$

$$\varphi(z, 5) = z^5 - \frac{5}{2}z^4 + \frac{5}{3}z^3 - \frac{1}{6}z.$$

$$\varphi(z, 6) = z^6 - 3z^5 + \frac{5}{2}z^4 - \frac{1}{2}z^2.$$

$$\varphi(z, 7) = z^7 - \frac{7}{2}z^6 + \frac{7}{2}z^5 - \frac{7}{6}z^3 + \frac{1}{6}z.$$

$$\varphi(z, 8) = z^8 - 4z^7 + \frac{14}{3}z^6 - \frac{7}{3}z^4 + \frac{2}{3}z^2.$$

Schlömilch beginnt seine Diskussion mit dem einfachsten Fall, für $n = 2$ und führt sie mittelst den Differentialformeln (3) und (4) weiter.

Die erste Funktion $\varphi(z, 1) = z$ stellt wieder eine Winkelhalbierende durch den Ursprung und den ersten und dritten Quadranten dar. Hinsichtlich der zweiten Funktion $\varphi(z, 2) = z(z-1)$ erhellt unmittelbar, dass sie von $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ *negativ* bleibt und fortwährend abnimmt; der Wert $\varphi\left(\frac{1}{2}, 2\right) = -\frac{1}{4}$ ist ihr *absolutes Minimum* innerhalb dieses Intervalles.

Nach (4) wird $\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z, 3) = \varphi(z, 2) + B_1$. Die rechte Seite ist anfangs für $z = 0$ *positiv*, nimmt dann kontinuierlich ab und erhält für $z = \frac{1}{2}$ den *negativen* Wert $-\frac{1}{12}$, woraus folgt, dass es zwischen $z = 0$ und $z = \frac{1}{2}$ einen, aber auch nur einen Wert gibt, für welchen der Ausdruck verschwindet. Diesem Verhalten von $\varphi'(z, 3)$ gemäss, steigt anfangs $\varphi(z, 3)$, erreicht zwischen $z = 0$ und $z = \frac{1}{2}$ ein Maximum und fällt dann wieder. Jenes Steigen fängt an mit $\varphi(0, 3) = 0$; das nachherige Fallen hört auf mit $\varphi\left(\frac{1}{2}, 3\right) = 0$; die Funktion $\varphi(z, 3)$ bleibt also *positiv* während des Intervalles von 0 bis $\frac{1}{2}$; dazwischen liegt ein *Maximum*.

Formel (3) gibt $\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z, 4) = \varphi(z, 3)$, und da nach dem Vorigen die rechte Seite, mithin auch $\varphi'(z, 4)$ *positiv* ist, so findet bei $\varphi(z, 4)$ ein fortwährendes Wachstum statt; dieses beginnt mit $\varphi(0, 4) = 0$; mithin ist $\varphi(z, 4)$ *positiv* und *zunehmend*.

In Gleichung $\frac{1}{5}\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z, 5) = \varphi(z, 4) - B_2$ ist die rechte Seite anfangs für $z = 0$ *negativ*, wird aber immer grösser und erreicht für $z = \frac{1}{2}$ ihren grössten Wert $\left(1 - \frac{1}{2^3}\right) B_2$, welcher *positiv* ist. Aus diesem Verhalten von $\varphi'(z, 5)$ folgt, dass $\varphi(z, 5)$ erst ab- und nachher wieder zunimmt. Die Abnahme fängt mit $\varphi(0, z) = 0$ an; die Zunahme hört mit $\varphi\left(\frac{1}{2}, 5\right)$ auf; somit bleibt $\varphi(z, 5)$ *negativ* von $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ und besitzt innerhalb dieses Intervalles ein *Minimum*.

Weil ferner $\frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z, 6) = \varphi(z, 5)$ und die rechte Seite, also auch $\varphi'(z, 6)$ immer *negativ* ist, so nimmt $\varphi(z, 6)$ immer ab, mit $\varphi(0, 6) = 0$ anfangend; somit ist $\varphi(z, 6)$ *negativ* und *abnehmend*.

Wir überblicken augenscheinlich den Fortgang dieser Schlüsse, deren Gesamtergebnis sich graphisch darstellen lässt, wenn man z als Abszisse und $\varphi(z, n)$ als zugehörige rechtwinklige Ordinate konstruiert;

dann werden im Intervall von 0 bis 1 die Funktionen *gerader Ordnung* charakterisiert durch

Fig. 1.

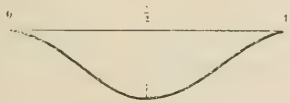


Fig. 2.

Fig. 1, wenn $n = 2, 6, 10, 14, \ldots\ldots, (4k-2)$,
Fig. 2, wenn $n = 4, 8, 12, 16, \ldots\ldots, (4k)$
und die Funktionen *ungerader Ordnung* durch

Fig. 3.

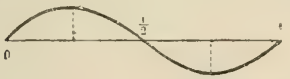


Fig. 4.

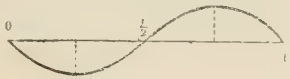


Fig. 3, wenn $n = 3, 7, 11, 15, \ldots\ldots, (4k-1)$,
Fig. 4, wenn $n = 5, 9, 13, 17, \ldots\ldots, (4k+1)$.

Auf eine genauere graphische Darstellung der verschiedenen Bernoullischen Funktionen werden wir im letzten Abschnitt eintreten.[27])

§ 12. Verwandlung der Bernoullischen Funktion in trig. Reihen.

Mit Hülfe der Schlömilchschen Definition als Differentialquotient lässt sich diese Funktion in eine nach cosinus oder sinus der Vielfachen eines Bogens fortschreitende Reihe entwickeln.

Aus der Theorie der Fourierschen Reihen und Integrale ist bekannt

$$f(z) = \frac{1}{2}\, a_0 + a_1 \cos\frac{\pi z}{n} + a_2 \cos\frac{2\pi z}{n} + a_3 \cos\frac{3\pi z}{n} + \cdots\cdots (0 \leqq z \leqq n),$$

wobei $$a_k = \frac{2}{n}\int_0^n f(z)\cos\frac{k\pi z}{n}\, dz.$$

Es sei $f(z) = \varphi(z, 2m)$ und $n = 1$; dann wird

$$\varphi(z, 2m) = \frac{1}{2}\, a_0 + a_1 \cos\pi z + a_2 \cos 2\pi z + a_3 \cos 3\pi z + \cdots\cdots$$

$$a_k = 2\int_0^1 \varphi(z, 2m)\cos k\pi z\, dz$$

$$= 2\, D_x^{2m}\left\{\varphi(x)\int_0^1 (e^{xz} - 1)\cos k\pi z\, dz\right\}_{x=0}.$$

Die Integration lässt sich jetzt leicht ausführen, doch müssen wir die zwei Fälle getrennt betrachten:

1. $k = O$, dann wird $\frac{1}{2} a_0 = D_x^{2m} \left\{ \varphi(x) \int_0^1 (e^{xz} - 1) dz \right\}_{x=0}$

$$= -\varphi^{(2m)}(0) = (-1)^m B_m.$$

2. $k > O$, daher $a_k = 2 D_x^{2m} \left\{ \varphi(x) \left[\int_0^1 (e^{xz} \cos k\pi z \, dz - \int_0^1 \cos k\pi z \, dz \right] \right\}_{x=0}$ [28])

$$a_k = 2 D_x^{2m} \left\{ \varphi(x) \frac{e^x [(-1)^k x - x]}{x^2 + \pi^2 k^2} \right\}_{x=0}$$

Diese Formel wird für $k =$ *gerade* $a_k = 2(-1)^m \frac{(2m)!}{(k\pi)^{2m}}$.

„ $k =$ *ungerade* $a_k = 0$.

Demnach wird die gesuchte Reihenentwicklung

$$\varphi(z, 2m) = (-1)^m B_m + (-1)^{m-1} 2 \frac{(2m)!}{(\pi)^{2m}} \left\{ \frac{\cos 2\pi z}{2^{2m}} + \frac{\cos 4\pi z}{4^{2m}} + \frac{\cos 6\pi z}{6^{2m}} + \cdots \right\} \quad (21)$$

für $0 \leqq z \leqq 1$.

Auf ganz analoge Weise finden wir einen Ausdruck für die ungerade Bernoullische Funktion, so dass ist

$$\varphi(z, 2m-1) = (-1)^m 2 \frac{(2m-1)!}{\pi^{2m-1}} \left\{ \frac{\sin 2\pi z}{2^{2m-1}} + \frac{\sin 4\pi z}{4^{2m-1}} + \frac{\sin 6\pi z}{6^{2m-1}} + \cdots \right\} \quad (22)$$

für $0 \leqq z \leqq 1$; $n > 1$.

Schlömilch findet diese Formel (22) durch Differentiation der Reihe (21). Beide Formeln erinnern uns an die Raabeschen Definitionsformeln (4) und (5), von denen ja Raabe die meisten Eigenschaften seiner Bernoullischen Funktion herleitet.

Diese Reihen lassen darauf schliessen, dass die Bernoullische Funktion in enger Beziehung zu den Kreisfunktionen steht, was auch J. Worpitzky in einer Studie über «Bernoullische und Eulersche Zahlen» beweist.[29])

Er zeigt, dass der Spezialwert einer geraden Ableitung der Cotangente eines Argumentes, multipliziert mit dem Argument selbst, sich durch eine Bernoullische Zahl wie folgt ausdrücken lässt

$$D_x^{2m}\left\{x \operatorname{cotg} x\right\}_{x=0} = -2^{2m} B_m.$$

Ebenso lässt sich der Nullwert der geraden Ableitungen der trig. Tangente durch eine Bernoullische Zahl oder durch eine Bernoullische Funktion vom Argument $\frac{1}{2}$ ausdrücken, so dass ist

$$D_x^{2m}\left\{\operatorname{tg} x\right\}_{x=0} = 2^{2m-1}\frac{(2^{2m}-1)}{m} B_m.$$

Schliesslich ist auch der Nullwert der geraden Ableitung der Sekante durch eine Bernoullische Funktion darstellbar, indem wird

$$D_x^{2m}\left\{\sec x\right\}_{x=0} = (-1)^{m+1}\frac{2^{4m+2}}{2m+1}\varphi\left(\frac{1}{4}, 2m+1\right).$$

§ 13. Die Bernoullische Funktion in bestimmten Integralen.

Ausser den einfachen Integralwerten in § 8 dieses Abschnittes gibt Schlömilch weder in seinem Compendium, noch in der erwähnten Abhandlung in Band I der Zeitschrift für Mathematik und Physik andere Integralausdrücke mit Bernoullischen Funktionen, abgesehen von der Bernoullischen Funktion, welche der Restausdruck bei der Summierung der allgemeinen Differenzenreihe enthält, und dem Restgliede der Maclaurinschen Summenformel, das unter dem Integralzeichen ebenfalls eine Bernoullische Funktion aufweist.[30]) Auch bei Worpitzky finden sich keine Integralformeln der Bernoullischen Funktion, doch lassen sich den Raabeschen Formen entsprechende Ausdrücke mit Leichtigkeit aufstellen.

III. Die Bernoullische Funktion nach L. Schläfli.

§ 14. Herleitung der Definition.

Schläfli geht aus von der Summe

$$S_m = 1^m + 2^m + 3^m + 4^m + \cdots\cdots + (x-1)^m;$$

gibt er dem m die Werte 0, 1, 2, ... , m, so erhält er (m+1) Summen S_0, S_1, S_2, ... , S_m. Diese multiplizieren wir der Reihe

nach mit $y^0, \frac{y^1}{1!}, \frac{y^2}{2!}, \ldots\ldots, \frac{y^m}{m!}$, so folgt

$$\frac{S_0 y^0}{0!} = 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1.$$

$$\frac{S_1 y^1}{1!} = \frac{y}{1!} + \frac{2y}{1!} + \frac{3y}{1!} + \ldots\ldots + \frac{[x-1]y}{1!}.$$

$$\frac{S_2 y^2}{2!} = \frac{y^2}{2!} + \frac{(2y)^2}{2!} + \frac{(3y)^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{[(x-1)y]^2}{2!}.$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\frac{S_m y^m}{m!} = \frac{y^m}{m!} + \frac{(2y)^m}{m!} + \frac{(3y)^m}{m!} + \ldots\ldots + \frac{[(x-1)y]^m}{m!}.$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

Addieren wir die senkrecht untereinanderstehenden Kolonnen, so erhalten wir, wenn bis ins Unendliche ausgedehnt wird,

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{S_m y^m}{m!} = 1 + e^y + e^{2y} + e^{3y} + \ldots\ldots + e^{(x-1)y} = \frac{e^{xy}-1}{e^y-1}.$$

Wir denken uns die Gleichung mit y multipliziert und dann zerrissen; so erhalten wir eine Beziehung, aus welcher wir die Bernoullischen Zahlen ebenso leicht herleiten können wie die Bernoullische Funktion. Wir definieren daher

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{S_m y^{m+1}}{m!} = \frac{y e^{xy}}{e^y-1} - \frac{y}{e^y-1} \qquad (1)$$

als die *Fundamentalgleichung der Bernoullischen Zahlen und Bernoullischen Funktionen.*

Der erste Bruch für sich betrachtet führt auf die Bernoullische Funktion, während der zweite auf die Bernoullischen Zahlen leitet.

Wir nehmen deshalb an, es sei

$$\frac{y e^{xy}}{e^y-1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \chi(n, x)\, y^n \quad \text{und} \qquad (2)$$

definieren $\chi(0, x) =$ Konstante $= 1$ und $\chi(n, x)$ als *n^{te} Bernoullische Funktion.* Die Koeffizienten der Potenzen von y sind also die Bernoullischen Funktionen, und wir wollen für die n^{te} Bernoullische Funktion $\chi(n, x)$ einen Ausdruck suchen. Es wird

$$\frac{y\,e^{xy}}{e^y-1} = \frac{y}{e^y-1}\,e^{xy} = \left\{1 + c_1 y + c_2 y^2 + \cdots\cdots + c_\lambda y^\lambda + \cdots\cdots\right\} \times$$

$$\left\{1 + \frac{xy}{1!} + \frac{x^2y^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{x^{n-\lambda}\,y^{n-\lambda}}{(n-\lambda)!} + \cdots\right\}.$$

Der allgemeine Term, welcher y^n liefert, lautet

$$\text{Koeffizient von } y^n = [y^n] = \frac{c_\lambda x^{n-\lambda}}{(n-\lambda)!}.$$

Daher wird

$$\frac{y\,e^{xy}}{e^y-1} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{c_\lambda x^{n-\lambda}}{(n-\lambda)!}\,y^n.$$

Diese Gleichung stellt denselben Wert dar wie Beziehung (2); durch Vergleichung beider folgt als Wert für $\chi(n, x)$

$$\chi(n,x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{c_\lambda x^{n-\lambda}}{(n-\lambda)!} = \frac{c_0 x^n}{n!} + \frac{c_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{\lambda=2}^{\lambda=n} \frac{c_\lambda x^{n-\lambda}}{(n-\lambda)!}.$$

Bei der letzten Summe ist ersichtlich, wie auch schon früher, dass infolge der Fakultät im Nenner λ nur bis $\lambda = n$ gehen darf.

Aus der Theorie der Bernoullischen Zahlen ist bekannt, dass bei Entwicklung von $\frac{y}{e^y-1}$ folgende Koeffizienten c_λ auftreten:

$$c_0 = 1;\ c_1 = -\frac{1}{2};\ c_{2\lambda-1} = 0;\ c_{2\lambda} = (-1)^{\lambda-1}\frac{B_\lambda}{(2\lambda)!};$$

daher wird, wenn wir noch für λ den Wert (2λ) setzen,

$$\chi(n,x) = \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{n}{2}} (-1)^{\lambda-1}\frac{B_\lambda}{(2\lambda)!\,(n-2\lambda)!}\,x^{n-2\lambda}.$$

Da aber $\frac{n!}{(2\lambda)!\,(n-2\lambda)!} = \binom{n}{2\lambda}$, so definieren wir die «n^{te} *Bernoullische Funktion*» durch

$$\chi(n,x) = \frac{1}{n!}\left\{x^n - \frac{n}{2}x^{n-1} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{n}{2}} (-1)^{\lambda-1}\binom{n}{2\lambda} B_\lambda x^{n-2\lambda}\right\}. \qquad (3)$$

Wir können die obere Grenze in der Summe weglassen, wenn wir bedenken, dass für $\lambda = \frac{n}{2}$ der Ausdruck $\binom{n}{n} = 1$, ebenso

$x^0 = 1$ wird und für ein grösseres λ zufolge von $\binom{n}{n+\mu} = 0$, wenn μ positiv, die Summe stets zu Null wird; die Reihe bricht also von selbst ab. Der Hauptunterschied dieser Definition gegenüber den beiden ersten ist der, dass auf der rechten Seite auch Terme mit x^0, also solche, die x gar nicht mehr enthalten, vorkommen dürfen, was diese Definition viel allgemeiner macht. Auch der vorgesetzte Faktor $\frac{1}{n!}$ leistet gute Dienste, da er das Konvergenzgebiet der Funktion vergrössert.[32]) Die kürzere Schreibweise durch Einführung der Summenformel könnte bei den übrigen Definitionen auch angewendet werden.

§ 15. Die Derivierten dieser Funktion.

A. Einfache Differentialquotienten.

Wir wollen vorerst die gerade und ungerade Bernoullische Funktion trennen. Ist n gerade, so wird für

1. $n = gerade = 2m$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\chi(2m,x) = \frac{1}{(2m)!}\left\{2m\,x^{2m-1} - \frac{2m(2m-1)}{2}x^{2m-2} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m}(-1)^{\lambda-1}\binom{2m}{2\lambda}B_\lambda(2m-2\lambda)x^{2m-2\lambda-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{(2m-1)!}\left\{x^{2m-1} - \frac{2m-1}{2}x^{2m-2} + \sum_{\substack{\lambda=1\\ \lambda=m-1}}^{\lambda=m}(-1)^{\lambda-1}\binom{2m-1}{2\lambda}B_\lambda x^{2m-2\lambda-1}\right\}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\chi(2m,x) = \chi(2m-1,x).$$

2. $n = ungerade = (2m+1)$. Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\chi(2m+1,x) = \frac{1}{(2m+1)!}\left\{(2m+1)x^{2m} - (2m+1)\frac{2m}{2}x^{2m-1} + \sum_{\lambda=1}(-1)^{\lambda-1}\binom{2m+1}{2\lambda}B_\lambda(2m+1-2\lambda)x^{2m-2\lambda}\right\}$$

$$= \frac{1}{(2m)!}\left\{ x^{2m} - \frac{2m}{2} x^{2m-1} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} (-1)^{\lambda-1} \binom{2m}{2\lambda} B_\lambda x^{2m-2\lambda} \right\}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \chi(2m+1, x) = \chi(2m, x).$$

Wir haben beide Funktionen getrennt betrachtet wegen der obern Grenze; wir hätten aber ebenso gut direkt von (3) ausgehen können und dann erhalten

$$\frac{\partial}{\partial x} \chi(n, x) = \chi(n-1, x). \qquad (4)$$

Die Ableitung einer Bernoullischen Funktion wird gefunden, indem man den Exponenten um die Einheit vermindert.

B. Die wiederholten Differentialquotienten.

Gestützt auf (4) werden

$$D^2 \chi(n, x) = D \chi(n-1, x) = \chi(n-2, x).$$

$$D^3 \chi(n, x) = \chi(n-3, x).$$

— — — — — — — —

$$D^\lambda \chi(n, x) = \chi(n-\lambda, x). \qquad (5)$$

Die wiederholte Ableitung einer Bernoullischen Funktion wird gefunden, indem man den Exponenten um die Zahl, welche die Anzahl der Ableitungen angibt, vermindert.

Wir finden hier den ersten grossen Vorteil dieser Funktion gegenüber den zwei frühern Definitionen; es treten keine Bernoullischen Zahlen zu den Ableitungen; die Definition ist demnach allgemeiner und liefert einfachere Resultate.

C. Einfache Integralformen.

Da die Differentialformeln sich einfacher gestalten, so thun dies auch die Integralformeln. Auch hier können wir vom allgemeinen Fall ausgehen und es resultiert

$$\int_0^x \chi(n-1, x)\, dx = \left\{ \chi(n, x) \right\}_0^x.$$

Da, wie wir später sehen werden, $\chi(2m, 0) = (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m)!}$ und $\chi(2m+1, 0) = 0$, so entstehen die beiden Beziehungen

$$\int_0^x \chi(2m-1, x)\, dx = \chi(2m, x) + (-1)^m \frac{B_m}{(2m)!} \quad \text{und} \quad (6)$$

$$\int_0^x \chi(2m, x)\, dx = \chi(2m+1, x). \quad (7)$$

Durch Integration wird somit der Exponent um die Einheit erhöht. *Das bestimmte Integral zwischen den Grenzen 0 und x einer Bernoullischen Funktion ist wieder eine Bernoullische Funktion mit um die Einheit erhöhtem Exponenten und ± einer Bernoullischen Zahl für die ungerade Bernoullische Funktion.*

Wir haben hier insofern eine Vereinfachung, als das Argument bei der Bernoullischen Zahl fehlt, das bei Raabe und Schlömilch noch hinzutritt.

Für die obere Grenze $x = \frac{1}{2}$ wird nach (7)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \chi(2m, x)\, dx = \chi\left(2m+1, \frac{1}{2}\right) = 0$$

und nach (6)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \chi(2m-1, x)\, dx = \chi\left(2m, \frac{1}{2}\right) + (-1)^m \frac{B_m}{(2m)!}.$$

Setzen wir für $\chi\left(2m, \frac{1}{2}\right)$ den später zu beweisenden Wert[33]) ein, so wird

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \chi(2m-1, x)\, dx = (-1)^m \frac{B_m}{(2m)!} \cdot \frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}.$$

§ 16. Die Bernoullische Funktion mit inversem Argument.

Ersetzen wir in (2) den Wert x durch (1—x), so wird

$$\frac{y\, e^{(1-x)y}}{e^y - 1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \chi(n, 1-x)\, y^n, \text{ d. h.,}$$

$$\chi(n, 1-x) = [y^n] \text{ in } \frac{y\, e^{(1-x)y}}{e^y - 1}.$$

Nun wird

$$\frac{y\, e^{(1-x)y}}{e^y - 1} = (-y)\frac{e^{x(-y)}}{e^{(-y)} - 1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \chi(n, x)(-y)^n = \sum_{n=0}^{n=\infty} \chi(n, x) y^n (-1)^n;$$

somit ist $$\chi(n, 1-x) = (-1)^n \chi(n, x). \qquad (8)$$

Daraus folgt für $x = 0$ unter Anwendung der Definitionsgleichung (3), wenn $n = \textit{gerade} = 2m$

$$\chi(2m, 0) = \chi(2m, 1) = (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m)!}, \qquad (9)$$

dagegen für $n = \textit{ungerade} = (2m+1)$, wenn x auch $= \frac{1}{2}$.

$$\chi(2m+1, 0) = \chi\left(2m+1, \frac{1}{2}\right) = \chi(2m+1, 1) = 0, \text{ d. h.,} \qquad (10)$$

alle Bernoullischen Funktionen ungerader Ordnung verschwinden für die Argumente 0, $\frac{1}{2}$ und 1.

Wir fragen uns nun, was wird aus $\chi\left(2m, \frac{1}{2}\right)$. Um diesen Wert ausmitteln zu können, müssen wir vorerst über die Vervielfachung des Argumentes aufgeklärt sein.

Wir denken uns die χ-Funktionen $\chi(n, x)$, $\chi\left(n, x + \frac{1}{k}\right)$, $\chi\left(n, x + \frac{2}{k}\right)$, ..., $\chi\left(n, x + \frac{k-1}{k}\right)$ aufgefasst als Koeffizienten von y^n in den dazu gehörenden Entwicklungen; dann addieren wir diese; die Summe T wird, wenn wir dieselbe als geometrische Progression summieren.

$$T = \frac{1}{e^y - 1} \cdot \frac{e^y - 1}{e^{\frac{y}{k}} - 1}\, y\, e^{xy} = \frac{y\, e^{xy}}{e^{\frac{y}{k}} - 1}, \text{ also}$$

$$\chi(n, x) + \chi\left(n, x + \frac{1}{k}\right) + \cdots + \chi\left(n, x + \frac{k-1}{k}\right) = [y^n] \text{ in } \frac{y\, e^{xy}}{e^{\frac{y}{k}} - 1}.$$

Es ist aber $$\frac{y\, e^{xy}}{e^{\frac{y}{k}} - 1} = \frac{k\left(\frac{y}{k}\right) e^{kx\left(\frac{y}{k}\right)}}{e^{\left(\frac{y}{k}\right)} - 1} = k \sum_{n=0}^{n=\infty} \chi(n, kx) \left(\frac{y}{k}\right)^n.$$

$$[y^n] = \frac{1}{k^{n-1}} \chi(n, kx).$$

Daraus ergibt sich

$$\chi(n, x) + \chi\left(n, x + \frac{1}{k}\right) + \chi\left(n, x + \frac{2}{k}\right) + \cdots\cdots + \chi\left(n, x + \frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{k^{n-1}} \chi(n, kx) \qquad (11)$$

als wichtige Formel, die über jede Vervielfachung des Argumentes Auskunft gibt. Infolge von $\frac{k-1}{k}$ bricht die Reihe links von selbst ab. Die beiden entsprechenden Formeln der frühern zwei Definitionen lieferten stets zwei getrennte Werte, je nachdem die Bernoullische Funktion gerade oder ungerade war. Wir ersehen auch daraus, dass die so definierte Bernoullische Funktion die allgemeinere ist; zudem ist diese Herleitung vorliegender Formel wesentlich einfacher als bei Raabe und Schlömilch.

Aus derselben lassen sich verschiedene Spezialwerte berechnen.

I. Verdopplung des Argumentes. $k = 2$.

$$\chi(n, x) + \chi\left(n, x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \chi(n, 2x).$$

Ersetzen wir in (8) die Grösse x durch $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ und setzen diesen Wert in die letzte Formel ein, so wird

$$\chi(n, x) + (-1)^n \chi\left(n, \frac{1}{2} - x\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \chi(n, 2x). \qquad (\alpha)$$

Ist darin $x = 0$ *und* $n =$ *ungerade* $= (2m+1)$, so wird

$$\chi\left(2m+1, \frac{1}{2}\right) = 0;$$ dagegen wird für

$x = 0$ *und* $n =$ *gerade* $= 2m$, wenn für $\chi(2m, 0)$ der bekannte Wert gesetzt wird,

$$\chi\left(2m, \frac{1}{2}\right) = (-1)^m \frac{2^{2m-1}-1}{2^{2m-1}} \cdot \frac{B_m}{(2m)!}. \qquad (12)$$

II. Verdreifachung des Argumentes. $k = 3$.

$$\chi(n, x) + \chi\left(n, x + \frac{1}{3}\right) + \chi\left(n, x + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3^{n-1}} \chi(n, 3x). \qquad (\beta)$$

Unter Anwendung von (8) wird für $x = 0$

$$\chi(n,0) + \chi\left(n, \frac{1}{3}\right) + (-1)^n \chi\left(n, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3^{n-1}} \chi(n,0);$$

$n =$ *ungerade* liefert die identische Gleichung $0 = 0$; dagegen ist für $n =$ *gerade*. wenn für $\chi(2m,0)$ der gefundene Wert gesetzt wird,

$$\chi\left(2m, \frac{1}{3}\right) = (-1)^m \frac{1}{2} \cdot \frac{3^{2m-1}-1}{3^{2m-1}} \cdot \frac{B_m}{(2m)!}. \qquad (13)$$

Aus Gleichung (α) resultiert für $x = \frac{1}{3}$ und $n = 2m$

$$\chi\left(2m, \frac{2}{3}\right) = 2^{2m-1}\left\{\chi\left(2m, \frac{1}{3}\right) + \chi\left(2m, \frac{1}{6}\right)\right\}. \qquad (\gamma)$$

Einen Wert für $\chi\left(2m, \frac{1}{6}\right)$ erhalten wir, wenn wir in (β) für $x = \frac{1}{6}$ und $n = 2m$ setzen; es ist dann

$$\chi\left(2m, \frac{1}{6}\right) + \chi\left(2m, \frac{1}{2}\right) + \chi\left(2m, \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3^{2m-1}} \chi\left(2m, \frac{1}{2}\right).$$

Daraus folgt, wenn für $\chi\left(2m, \frac{1}{2}\right)$ der früher gefundene Wert (12) gesetzt wird,

$$\chi\left(2m, \frac{1}{6}\right) = (-1)^m \frac{1}{2} \cdot \frac{(2^{2m-1}-1)(1-3^{2m-1})}{6^{2m-1}} \cdot \frac{B_m}{(2m)!}. \qquad (14)$$

Setzen wir die gefundenen Formeln (13) und (14) in (γ) ein, so ist, was zwar einfacher aus Formel (8) für $x = \frac{2}{3}$ und $n = 2m$ hervorgeht,

$$\chi\left(2m, \frac{2}{3}\right) = (-1)^m \frac{1}{2} \cdot \frac{3^{2m-1}-1}{3^{2m-1}} \cdot \frac{B_m}{(2m)!}. \qquad (15)$$

Wir hätten schon dort die zwei Sätze aufstellen können:

1. *Jede zwei geraden Bernoullischen Funktionen, deren Argumente sich zu 1 ergänzen. sind nach absolutem Wert und nach Vorzeichen einander gleich.*

2. *Jede zwei ungeraden Bernoullischen Funktionen, deren Argumente sich zu 1 ergänzen, sind wohl dem Vorzeichen nach entgegengesetzt, dem absoluten Werte nach aber gleich.*

III. Vierfaches Argument. $k = 4$.

$$\chi(n, x) + \chi\left(n, x + \frac{1}{4}\right) + \chi\left(n, x + \frac{1}{2}\right) + \chi\left(n, x + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4^{n-1}}\,\chi(n, 4x).$$

Für $x = 0$ wird unter Anwendung von Formel (8) und Einsetzen der Werte für $\chi(2m, 0)$ und $\chi\left(2m, \frac{1}{2}\right)$ für die gerade Bernoullische Funktion

$$\chi\left(2m, \frac{1}{4}\right) = \chi\left(2m, \frac{3}{4}\right) = (-1)^m\,\frac{2^{2m-1}-1}{2^{4m-1}} \cdot \frac{B_m}{(2m)!}. \quad (16)$$

Auf ähnliche Weise lassen sich $\chi\left(2m, \frac{5}{6}\right)$, $\chi\left(2m, \frac{1}{8}\right)$, ..., $\chi\left(2m, \frac{7}{8}\right)$ und andere χ-Funktionen berechnen; die Ausdrücke werden aber ziemlich kompliziert.

§ 17. Die Bernoullische Funktion mit negativem Argument.

Wir können auf zwei getrennten Wegen das Verhalten der Bernoullischen Funktion mit negativem Argument untersuchen. Vorerst gehen wir von der Definitionsformel (3) aus, müssen aber dabei die geraden und ungeraden Funktionen getrennt betrachten.

1. Die gerade Bernoullische Funktion. Wir ersetzen in (3) n durch $2m$ und x durch $(-x)$; dann wird

$$\chi(2m, -x) = \frac{1}{(2m)!}\left\{x^{2m} + \frac{2m}{2}\,x^{2m-1} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m}(-1)^{\lambda-1}\binom{2m}{2\lambda}B_\lambda\,x^{2m-2\lambda}\right\}.$$

Durch Addition und Subtraktion desselben Ausdruckes $\frac{2m\,x^{2m-1}}{(2m)!}$ und passendes Zusammennehmen wird

$$\chi(2m, -x) = \chi(2m, x) + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

2. Die ungerade Bernoullische Funktion. Durch analoges Verfahren wird

$$\chi(2m+1, -x) = \frac{1}{(2m+1)!}\left\{-x^{2m+1} - \frac{2m+1}{2}\,x^{2m}\right.$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m}(-1)^{\lambda-1}\binom{2m+1}{2\lambda}B_\lambda(-x)^{2m+1-2\lambda}\Bigg\}.$$

Hier addieren und subtrahieren wir $\frac{(2m+1)x^{2m}}{(2m+1)!}$; nun ist

$$\chi(2m+1,-x) = -\chi(2m+1,x) - \frac{x^{2m}}{(2m)!}.$$

Eine *allgemeine* Formel für die Bernoullische Funktion mit negativem Argument finden wir aus folgender Betrachtung:

Ersetzen wir in Formel (2) den Wert x durch (1+x), so ist

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\chi(n,1+x)\,y^n = \frac{y\,e^{(1+x)y}}{e^y-1}. \qquad (\alpha)$$

$$\frac{y\,e^{(1+x)y}}{e^y-1} = y\,e^{xy} + \frac{y\,e^{xy}}{e^y-1} = y\,e^{xy} + \sum_{n=0}^{n=\infty}\chi(n,x)\,y^n.$$

Durch Reihenentwicklung von e^{xy} folgt

$$\frac{y\,e^{(1+x)y}}{e^y-1} = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^{n-1}\,y^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{n=\infty}\chi(n,x)\,y^n. \qquad (\beta)$$

Vergleichen wir die Koeffizienten von y^n der Gleichungen (α) und (β), so erhalten wir

$$\chi(n,1+x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \chi(n,x). \qquad (17)$$

Ersetzen wir darin x durch (−x), so wird unter Berücksichtigung von (8)

$$\chi(n,-x) = (-1)^n\left\{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \chi(n,x)\right\}. \qquad (18)$$

Diese Formel geht für $n = 2m$ und $n = (2m+1)$ in die eingangs dieses Paragraphen hergeleiteten über. Sie dient zur Berechnung der Bernoullischen Funktion mit negativem Argument. Auch hier zeigt sich wieder die Vereinfachung, da Raabe und Schlömilch je zwei entsprechende Formeln nötig haben.

Um die χ-Funktion auch ausserhalb des Intervalles 0 bis 1 zu untersuchen, dient eine Formel, welche wir erhalten, indem wir in (17) für (x+1) der Reihe nach setzen (x+1), (x+2), ... , (x+k) und sämtliche so entstandenen Gleichungen addieren; es wird dann

$$\chi(n, k+x) = \chi(n, x) + \frac{1}{(n-1)!}\left\{x^{n-1} + (1+x)^{n-1} + (2+x)^{n-1} + \cdots\cdots + (k-1+x)^{n-1}\right\}. \quad (19)$$

Eine weitere Formel zur Untersuchung der Bernoullischen Funktion mit negativem Argument, die uns gute Dienste zur numerischen Ausrechnung und Kontrolle der Werte leistet, finden wir, wenn wir in (8) für x den Wert $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ setzen; dieselbe geht dann über in

$$\chi\left(n, \frac{1}{2} - x\right) = (-1)^n \chi\left(n, \frac{1}{2} + x\right). \quad (20)$$

Diese Formel charakterisiert uns den Punkt $x = \frac{1}{2}$ als *Maximal-* oder *Minimalstelle.*

§ 18. Diskussion dieser Definition.

Setzen wir in der Definitionsformel (3) der Reihe nach für n die Werte 1, 2, 3, ... , so nehmen die acht ersten Funktionen dieser Definition folgende Werte an, die nacheinander diskutiert werden sollen:

$$\chi(1, x) = x - \frac{1}{2}.$$

$$\chi(2, x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}.$$

$$\chi(3, x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12}.$$

$$\chi(4, x) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} - \frac{1}{720}.$$

$$\chi(5, x) = \frac{x^5}{120} - \frac{x^4}{48} + \frac{x^3}{72} - \frac{x}{720}.$$

$$\chi(6, x) = \frac{x^6}{720} - \frac{x^5}{240} + \frac{x^4}{288} - \frac{x^2}{1440} + \frac{1}{30240}.$$

$$\chi(7, x) = \frac{x^7}{5040} - \frac{x^6}{1440} + \frac{x^5}{1440} - \frac{x^3}{4320} + \frac{x}{30240}.$$

$$\chi(8, x) = \frac{x^8}{40320} - \frac{x^7}{10080} + \frac{x^6}{8640} - \frac{x^4}{17280} + \frac{x^2}{60480} - \frac{1}{1209600}.$$

Wir gelangen hier zu ähnlichen Resultaten wie früher; da aber auf der rechten Seite auch Terme vorkommen dürfen, die von der Variabelen befreit sind, so ist leicht ersichtlich, dass nur die ungeraden Bernoullischen Funktionen für die Werte $x = 0$ und $x = 1$ erfüllt sind; das Glied der geraden Bernoullischen Funktion, das die Veränderliche nicht enthält, gibt für das Argument 0 und 1 sofort den Wert der ganzen Funktion an.

$\chi(1, x) = x - \frac{1}{2}$ stellt eine Gerade dar, die aber für diese Definition nicht mehr durch den Ursprung geht.

$\chi(2, x)$ ist die Gleichung einer Parabel; die Funktion besitzt ein Minimum bei $x = \frac{1}{2}$ vom Werte $\chi\left(2, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}$.

$\chi(3, x)$ besitzt im Intervall 0 bis 1 sowohl ein Maximum als ein Minimum, und zwar liegt ersteres bei $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}$, das letztere dagegen bei $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}$; zudem ist $\chi\left(3, \frac{1}{2}\right) = 0$; diese Kurve, analytisch gesprochen, ist eine Art Parabel höhern Grades.

Die Funktion $\chi(4, x)$ besitzt bei $x = \frac{1}{2}$ ein Maximum vom Werte $\frac{7}{5760}$; zudem ergeben sich zwei Minima bei $x = 0$ und $x = 1$, so dass $\chi(4, 0) = \chi(4, 1) = -\frac{1}{720}$.

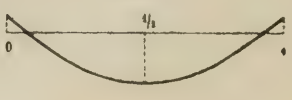
Was $\chi(5, x)$ anbetrifft, so ist diese Funktion als ungerade Bernoullische Funktion erfüllt für $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ und $x = 1$; sie weist ein Maximum auf zwischen $\frac{1}{2}$ und 1, wie auch ein Minimum zwischen 0 und $\frac{1}{2}$.

Alle diese höhern Bernoullischen Funktionen stellen Parabeln höherer Ordnung dar.

Wir erhalten somit folgende Bilder des Verlaufes der Bernoul-

lischen Funktion zwischen den Grenzen 0 und 1; im wesentlichen stimmen sie mit den bei Schlömilch dargestellten überein.

Figur 1.

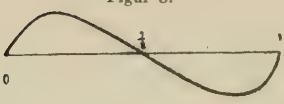


Figur 2.

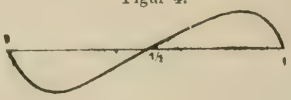
Die Funktionen sind charakterisiert durch[34])

Figur 1, wenn $n = 2, 6, 10, \ldots\ldots, (4k-2)$,
» 2, » $n = 4, 8, 12, \ldots\ldots, 4k$,
» 3, » $n = 3, 7, 11, \ldots\ldots, (4k-1)$,
» 4, » $n = 5, 9, 13, \ldots\ldots, (4k+1)$.

Figur 3.



Figur 4.



§ 19. Entwicklung der Bernoullischen Funktion in Reihen.

Wir könnten hier analog verfahren wie Schlömilch[35]); zudem würden wir noch viel rascher ans Ziel kommen, da das Integral, welches bei dieser Herleitung auszuwerten ist, leicht dargestellt werden kann.[36]) Schläfli geht aber ganz auf seine Art und Weise vor; er untersucht vorerst, was wird aus

$$\frac{\alpha}{\lambda-\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\alpha^2}{\lambda^2} + \cdots\cdots\cdots + \frac{\alpha^n}{\lambda^n} + \cdots\cdots\cdots = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\alpha^n}{\lambda^n}.$$

Multiplizieren wir mit x^λ, so wird

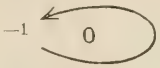
$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^\lambda}{\lambda^n} = \left[\alpha^n\right] \text{ in } \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\alpha x^\lambda}{\lambda-\alpha}. \qquad (\alpha)$$

Laut Theorie der Gammafunktion gilt für ein beliebiges a die Beziehung[37])

$$\int_{-1}^{0} x^{-a}(1-x)^{b-1}\,dx = 2i \sin a\pi \,\frac{\Gamma(1-a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(b-a+1)};$$

substituieren wir für a den Wert (1—n) und setzen $b = 1$, so wird

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2i \sin n\pi} \int x^{n-1}\, dx. \qquad (\beta)$$



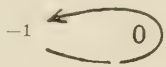
Diese Formel gibt uns ein Mittel an die Hand, obige Summe durch ein bestimmtes Integral auszudrücken. Ist t die Integrationsvariabele, so wird nach (β)

$$\frac{1}{(\alpha-\lambda)} = \frac{1}{2i \sin(\alpha-\lambda)\pi} \int t^{\alpha-\lambda-1}\, dt = \frac{(-1)^{\lambda}}{2i \sin \alpha\pi} \int t^{\alpha-\lambda-1}\, dt.$$

Die Summe geht dann über in

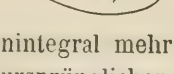
$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\alpha x^{\lambda}}{\lambda-\alpha} = \frac{1}{2i \sin \alpha\pi} \int \alpha t^{\alpha-1} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} (-1)^{\lambda-1} \left(\frac{x}{t}\right)^{\lambda} dt$$

$$= \frac{\alpha}{2i \sin \alpha\pi} \int t^{\alpha} \frac{x}{t+x} \cdot \frac{dt}{t}.$$



Der gefährliche Punkt des Integrales ist $t = -x$; für diesen wird der Nenner zu Null, so dass der Wert des Integrales ∞ ist, wir müssen daher die Schlinge um $(-x)$ gehen lassen, diesen Pol also ausschliessen, und wir betrachten

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\alpha x^{\lambda}}{\lambda-\alpha} = \frac{\alpha}{2i \sin \alpha\pi} \int t^{\alpha} \frac{x\, dt}{t(t+x)}. \qquad (\gamma)$$



Dieses Integral ist aber kein Schlingenintegral mehr; denn es nimmt nach einem ganzen Umlauf seinen ursprünglichen Wert an. Wir dürfen dann auch später, ohne den Wert des Integrales zu verändern, eine additive Konstante beifügen, welche wir so auswählen, dass sie für unsere Zwecke passt.

Durch Substitution von $t^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} t}$ wird

$$\frac{\alpha t^\alpha}{2 i \sin \alpha \pi} = \frac{\alpha t^\alpha}{e^{i\alpha\pi} - e^{-i\alpha\pi}} = \frac{1}{2 i \pi} \cdot \frac{2 i \pi \alpha e^{2 i \pi \alpha \left(\frac{\operatorname{Log} t}{2 i \pi} + \frac{1}{2}\right)}}{e^{2 i \alpha \pi} - 1}$$

$$= \frac{1}{2 i \pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} \chi\left(n, \frac{\operatorname{Log} t}{2 i \pi} + \frac{1}{2}\right) (2 i \pi \alpha)^{n}.$$ [38])

Somit ist $$\left[\alpha^n\right] = \frac{1}{2 i \pi} \chi\left(n, \frac{\operatorname{Log} t}{2 i \pi} + \frac{1}{2}\right) (2 i \pi)^n.$$

Deshalb wird, wenn wir die Gleichungen (α) und (γ) berücksichtigen,

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{x^\lambda}{\lambda^n} = \frac{(2 i \pi)^n}{2 i \pi} \int_{-1 \; -x,0} \left\{ \chi\left(n, \frac{\operatorname{Log} t}{2 i \pi} + \frac{1}{2}\right) - \chi\left(n, \frac{\operatorname{Log} x}{2 i \pi}\right) \right\} \frac{x \, dt}{t (t + x)}, \quad (\delta)$$

wobei die zugefügte Konstante den Wert hat

$$K = - \frac{(2 i \pi)^n}{2 i \pi} \int_{-1 \; -x,0} \chi\left(n, \frac{\operatorname{Log} x}{2 i \pi}\right) \frac{x \, dt}{t (t + x)}.$$

Wir wollen nun darnach trachten, x auf die Peripherie des Einheitskreises zu bringen; zu diesem Zweck müssen wir uns aber zuerst über Log t und Log (—x) ins Klare setzen; vor dem Nullpunkt wollen wir uns hüten, weil in demselben eine starke Transcendenz vorhanden ist.

$\operatorname{Log}(-x) = -i\pi(-\varrho) + 2 i \pi \Theta$; Θ = Konstante. $\varrho = 0$, sobald (—x) auf der Peripherie des Einheitskreises liegt.

Wenn $t = e^{2 i \pi \varphi - i \pi}$, wird $\operatorname{Log} t = -i\pi + 2 i \pi \varphi$.

φ = Bogen von 0 bis 1; wenn $t = x$, soll $\varphi = \Theta$ werden. Dann sind

$\operatorname{Log} t = 2 i \pi \left(\varphi - \frac{1}{2}\right)$; $\varphi = \frac{\operatorname{Log} t}{2 i \pi} + \frac{1}{2}$; Θ = Konstante $= \frac{\operatorname{Log} x}{2 i \pi}$;

$\frac{dt}{t} = 2 i \pi d\varphi$.

Setzen wir diese Werte ein, so wird aus (δ)

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{x^\lambda}{\lambda^n} = \frac{(2 i \pi)^n}{2 i \pi} \int_{-1 \; -x,0} \left\{ \chi(n, \varphi) - \chi(n, \Theta) \right\} \frac{x \, dt}{t (t + x)}. \quad (\varepsilon)$$

Der Klammerausdruck unter dem Integralzeichen wird dann in dem Momente zu Null, sobald $\varphi = \Theta$ geworden; somit ist

$$x = e^{2i\pi\Theta}; \quad t = -e^{2i\pi\varphi};$$

$$e^{2i\pi\Theta} = e^{i\pi(\varphi+\Theta)-i\pi(\varphi-\Theta)}; \quad e^{2i\pi\varphi} = e^{i\pi(\varphi+\Theta)+i\pi(\varphi-\Theta)};$$

$$t+x = e^{i\pi(\varphi+\Theta)-i\pi(\varphi-\Theta)} - e^{i\pi(\varphi+\Theta)+i\pi(\varphi-\Theta)}$$

$$= -e^{i\pi(\varphi+\Theta)}\, 2i\sin(\varphi-\Theta)\pi;$$

$$\frac{x}{t+x} = \frac{1}{2}\left\{1+i\operatorname{cotg}(\varphi-\Theta)\pi\right\}.$$

Substituieren wir diese Werte ins Integral (ε), so erhalten wir

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{x^\lambda}{\lambda^n} = \frac{(2i\pi)^n}{2i\pi}\int\left\{\chi(n,\varphi)-\chi(n,\Theta)\right\}\frac{1}{2}\left\{1-i\operatorname{cotg}(\varphi-\Theta)\pi\right\}2i\pi\,d\varphi.$$

$-1 \quad -\chi,0$

Setzen wir jetzt $x = e^{2i\pi\Theta}$, so bewegt sich die Variabele auf dem Einheitskreis von 0 bis 1, und es wird

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{e^{2i\pi\Theta\lambda}}{\lambda^n} = (2i\pi)^n \int_0^1 \left\{\chi(n,\varphi)-\chi(n,\Theta)\right\}\frac{1}{2}\left\{1-i\operatorname{cotg}(\varphi-\Theta)\pi\right\}d\varphi. \quad (\mu)$$

Wegen i^n sollten wir die Fälle für $n =$ gerade oder $n =$ ungerade trennen; um dies zu vermeiden, ziehen wir vor, beide Seiten mit $(-i)^n = e^{-in\frac{\pi}{2}}$ zu multiplizieren; dann wird (μ) zu

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{e^{i\left(2\pi\lambda\Theta-\frac{n\pi}{2}\right)}}{\lambda^n}$$

$$= (2\pi)^n \int_0^1 \left\{\chi(n,\varphi)-\chi(n,\Theta)\right\}\frac{1}{2}\left\{1+i\operatorname{cotg}(\varphi-\Theta)\pi\right\}d\varphi. \quad (21)$$

Diese Formel gilt auch für $\Theta = \varphi$, da dieselbe dafür nicht unstetig wird. Wegen der Cotangente lässt sich anfangs leicht glauben, das Integral werde unstetig; doch ist ja im Nenner der Cotangente der Sinus, der sich auf den Bogen $(\varphi - \Theta)$ reduzieren lässt. Da die χ-Funktionen algebraische Funktionen n^{ten} Grades sind, so geht die Klammer in tiefster Annäherung über in $(\varphi^n - \Theta^n)$; somit verhält sich das Integral

wie $\frac{\varphi^n - \Theta^n}{\varphi - \Theta}$; ein solcher Ausdruck ist aber endlich und daher auch das Gesamtintegral für $\varphi = \Theta$.

Herausheben der Komponenten.

In obiger Formel (21) sind sowohl reelle als imaginäre Bestandteile enthalten. Wir wollen nach dem Moivreschen Grundsatz der Trennung des Reellen vom Imaginären die einzelnen Komponenten herausnehmen, da wir zerlegen können

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} e^{i\left(2\pi\lambda\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \cos\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right) + i \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \sin\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right). \quad (\varrho)$$

A. Die reelle Komponente.

Dieselbe wird

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n} = \frac{(2\pi)^n}{2} \int_0^1 \Big\{ \chi(n,\varphi) - \chi(n,\Theta) \Big\} d\varphi. \quad (\nu)$$

Dieses Integral muss ausgemittelt werden. Wir wissen, dass durch Integration der Grad einer Bernoullischen Funktion um die Einheit steigt; somit wird für n gerade oder ungerade

$$\int_0^1 \chi(n,\varphi)\, d\varphi = \Big\{ \chi(n+1,\varphi) \Big\}_0^1 = 0;$$

denn die ungeraden Bernoullischen Funktionen verschwinden für die Argumente 0 und 1 und die geraden weisen denselben Wert auf, der hier das eine Mal mit negativem Vorzeichen genommen werden muss. Es zeigt sich nur die Ausnahme für $n = 0$; doch müssen wir diesen Fall ausschliessen, da sonst links alle Nenner zur Einheit werden.

Ferner ist $\chi(n,\Theta)$ in Bezug auf φ als Konstante zu betrachten, also $\int_0^1 \chi(n,\Theta)\, d\varphi = \chi(n,\Theta)$; daher wird (ν)

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n} = -\frac{(2\pi)^n}{2} \chi(n,\Theta).$$

$$\chi(n, \Theta) = -\frac{2}{(2\pi)^n} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n}. \qquad (22)$$

Dies ist wieder eine weit allgemeinere Formel als die entsprechende der frühern Definitionen; aus derselben erhalten wir leicht die den frühern gleichwertigen Beziehungen; die einzige Bedingung ist $0 < \Theta < 1$.

Die Formel konvergiert ganz unzweideutig für $n = 2, 3, 4, \ldots\ldots$; für $n = 1$ müssen wir die Konvergenzfrage noch genauer prüfen; es wird für $n = 1$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{\pi}{2}\right)}{\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin 2\lambda\pi\Theta}{\lambda}$$

$$= -\pi\chi(1, \Theta) = -\pi\left(\Theta - \frac{1}{2}\right).$$

Der höchste Wert von $\sin 2\lambda\pi\Theta$ kann nur 1 sein; dann nähert sich die Summe der Reihe der Stammbrüche, welche *divergent* ist. Die Folge davon ist, dass die Werte $\Theta = 0$ und $\Theta = 1$ ausgeschlossen werden müssen. Ist n nahe bei Null, so schreitet der Zähler fort nach $2\pi\Theta$, $4\pi\Theta$, $6\pi\Theta$, $\ldots\ldots$ Die Summe dieser Ausdrücke wird aber ∞ gross; die Konvergenz erscheint daher sehr verdächtig; aber für $2\pi\Theta = \psi$ ist

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin\lambda\psi}{\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin\lambda\psi}{\lambda\psi}\,\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2}.$$

Wir setzen $\lambda\psi = \mu$; dann dürfen wir ein sehr kleines ψ als $d\mu$ betrachten, so dass ist

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu = \frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2}.$$

$\mu = \lambda\psi$ durchläuft die Wertereihe μ, $\mu+\psi$, $\mu+2\psi$, $\ldots\ldots$, d. h., wenn ψ klein genug gewählt, so geht μ von 0 bis ∞; somit wird die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\sin u}{\mu}\,d\mu = \int_0^{\infty} \frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu = \frac{\pi}{2}.$$

Also ist der Ausdruck *konvergent*, da wir hier einen endlichen Wert erhalten.

Wir kehren wieder zu unsrer reellen Komponente (22) zurück und wollen die Fälle n = gerade = 2 m und n = ungerade = (2m+1) trennen.

Für $n = 2m$ wird $\cos(2\lambda\pi\Theta - m\pi) = (-1)^m \cos 2\lambda\pi\Theta$, also

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos 2\lambda\pi\Theta}{\lambda^{2m}} = (-1)^{m-1} \frac{(2\pi)^{2m}}{2} \chi(2m, \Theta). \qquad (23)$$

Dies ist eine den Raabeschen Definitionsformeln entsprechende Beziehung; nur fehlt hier wieder der lästige Zusatz der Bernoullischen Zahl.

Setzen wir darin $\Theta = 0$ und berücksichtigen den Wert für $\chi(2m, 0)$, so wird

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda^{2m}} = S_{2m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2\pi)^{2m} B_m}{(2m)!}. \qquad (24)$$

Da $\chi(2m, 0) = \chi(2m, 1)$, so würden wir die nämliche Formel erhalten für $\Theta = 1$.

Für $n = (2m + 1)$ wird $\cos\left(2\lambda\pi\Theta - m\pi - \frac{\pi}{2}\right) =$ $(-1)^m \sin 2\lambda\pi\Theta$; dies in (22) gesetzt, gibt

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin 2\lambda\pi\Theta}{\lambda^{2m+1}} = (-1)^{m-1} \frac{1}{2} (2\pi)^{2m+1} \chi(2m+1, \Theta). \qquad (25)$$

Für $\Theta = 0, \frac{1}{2}, 1$ resultiert daraus die identische Gleichung $0 = 0$; dieselbe entsteht ebenfalls, wenn wir (23) nach Θ ableiten. Differenzieren wir (25) nach Θ, so entsteht wieder Formel (23); alles dies sind Kontrollen der Richtigkeit.

Spezialfälle dieser ungeraden Bernoullischen Funktion sind lösbar und sehr zu vereinfachen, wenn ein Mittel gefunden würde, um die ungerade Bernoullische Funktion durch Bernoullische Zahlen oder durch geeignete bestimmte Integrale auszudrücken; doch stösst man gerade bei letzterer Aufgabe auf die Summierung von komplizierten Ausdrücken. So wird z. B. für $\Theta = \frac{1}{4}$ aus Formel (25)

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin \lambda \frac{\pi}{2}}{\lambda^{2m+1}} = (-1)^{m-1} \frac{1}{2} (2\pi)^{2m+1} \chi\left(2m+1, \frac{1}{4}\right).$$

Es wird $$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin \lambda \frac{\pi}{2}}{\lambda^{2m+1}} = 1 - \frac{1}{3^{2m+1}} + \frac{1}{5^{2m+1}} - \frac{1}{7^{2m+1}}$$

$$+ - \cdots\cdots = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^{\lambda-1}}{(2\lambda-1)^{2m+1}} = H_{2m+1},$$

somit $$H_{2m+1} = (-1)^{m-1} \frac{1}{2} (2\pi)^{2m+1} \chi\left(2m+1, \frac{1}{4}\right). \qquad (26)$$

Ähnliche Formeln könnten wir für $\Theta = \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \cdots\cdots$ ableiten; jedesmal kommen wir auf Funktionen, die den Bernoullischen Funktionen nahe verwandt sein müssen, da sie ganz ähnlichen Summenformeln genügen.[39])

B. Die imaginäre Komponente.

Zurückgreifend auf Formel (21) und (ϱ) wird, wie leicht einzusehen ist, $$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n}$$

$$= \frac{1}{2} (2\pi)^n \int_0^1 \left\{ \chi(n, \varphi) - \chi(n, \Theta) \right\} \operatorname{cotg} \pi(\varphi - \Theta)\, d\varphi. \qquad (27)$$

Es ist dies wieder eine ganz allgemeine, sämtliche Fälle einschliessende Formel.

Für $n = 1$ wird, da $\sin\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 2\lambda\pi\Theta$,

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos 2\lambda\pi\Theta}{\lambda} = \pi \int_0^1 \left\{ \chi(1, \Theta) - \chi(1, \varphi) \right\} \operatorname{cotg} \pi(\varphi - \Theta)\, d\varphi.$$

Nach längern Umwandlungen, wobei als Integrationskonstante Log 2 genommen ist, wird, wenn Θ als Konstante weggelassen, also bei verändertem $\varphi = \varphi_1$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos 2\lambda\pi\Theta}{\lambda} = \operatorname{Log}(2 \sin \pi\varphi_1).$$

Es ist auch, wenn $(\varphi - \Theta) = \varphi_1$ gesetzt, da die Grenzen $(-\Theta)$ und $(1-\Theta)$ werden, $$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n} =$$

$$= (2\pi)^n \frac{1}{2} \int_{-\Theta}^{1-\Theta} \{\chi(n, \varphi_1 + \Theta) - \chi(n, \Theta)\} \operatorname{cotg} \pi \varphi_1 \, d\varphi_1.$$

Das Integral rechts bezeichnen wir mit S; es lässt sich zerlegen in

$$S = \int_0^{1-\Theta} \{\chi(n, \varphi_1 + \Theta) - \chi(n, \Theta)\} \operatorname{cotg} \pi \varphi_1 \, d\varphi_1$$

$$- \int_0^{+\Theta} \{\chi(n, \Theta - \varphi_1) - \chi(n, \Theta)\} \operatorname{cotg} \pi \varphi_1 \, d\varphi_1,$$

wenn im zweiten Integral zudem noch φ_1 durch $(-\varphi_1)$ ersetzt wird.

Wir können nun partiell integrieren, indem wir setzen

$$\int \operatorname{cotg} \pi \varphi_1 \, d\varphi_1 = \frac{1}{\pi} \operatorname{Log}(2 \sin \pi \varphi_1).$$

Die finiten Teile der partiellen Integration aus beiden obigen Integralen der Summe S werden, wie wir uns durch Ausführung der Integration überzeugen können, zu Null; es bleiben nur die infiniten Teile, und es wird

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n}$$

$$= \frac{1}{2} (2\pi)^n \frac{1}{\pi} \int_0^{\Theta} \operatorname{Log}(2 \sin \pi \varphi_1) \, \chi(n-1, \Theta - \varphi_1) \, d\varphi_1$$

$$- \frac{1}{2} (2\pi)^n \frac{1}{\pi} \int_0^{1-\Theta} \operatorname{Log}(2 \sin \pi \varphi_1) \, \chi(n-1, \varphi_1 + \Theta) \, d\varphi_1.$$

Da für $n = (2m+1)$ der Wert $\sin\left(2\lambda\pi\Theta - m\pi - \frac{\pi}{2}\right) =$
$-\cos(2\lambda\pi\Theta - m\pi) = -(-1)^m \cos 2\lambda\pi\Theta$, so wird

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^{m+1} \cos 2\lambda\pi\Theta}{\lambda^{2m+1}}$$

$$= (2\pi)^{2m} \int_0^{\Theta} \operatorname{Log}(2 \sin \pi \varphi_1) \, \chi(2m, \Theta - \varphi_1) \, d\varphi_1$$

$$- (2\pi)^{2m} \int_0^{1-\Theta} \operatorname{Log}(2 \sin \pi \varphi_1) \, \chi(2m, \varphi_1 + \Theta) \, d\varphi_1.$$

Für $\Theta = 0$ verschwindet das erste Integral, und es ist

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda^{2m+1}} = (-1)^m (2\pi)^{2m} \int_0^1 \mathrm{Log}\,(2 \sin \pi\varphi)\, \chi\,(2m, \varphi)\, d\varphi, \quad (28)$$

wenn wieder φ als Integrationsvariabele gewählt wird.

Mit Hülfe dieser Definition als Reihenentwicklung lässt sich die *Raabesche Restformel* ableiten; dann können wir den Zusammenhang derselben mit der *Riemannschen Reihe* nachweisen; diese Beziehungen sprechen deutlich für die Allgemeinheit dieser Definition. Alles hier auszuführen, würde aber den Rahmen vorliegender Arbeit wesentlich überschreiten.[40])

§ 20. Integrale mit Bernoullischen Funktionen.

Schläfli selbst gibt in seinen Vorlesungen keine Integraldarstellungen der Bernoullischen Funktion. Dieselben gestalten sich aber wesentlich einfacher als die entsprechenden der frühern Definitionen. Dieser § liesse sich beliebig weit ausdehnen; es taucht eine grosse Mannigfaltigkeit an Integralen der Bernoullischen Funktion auf. Wir geben hier nur die zum Vergleich wichtigen. Gute Hülfe bei all diesen Darstellungen liefern uns die Formeln (23) und (25).

A. Einfache Integrale.

1. Für die gerade Bernoullische Funktion.

Es interessieren uns einige Spezialfälle der Formel (7); setzen wir darin für die obere Grenze der Reihe nach $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$, so wird vorerst $\int_0^{\frac{1}{3}} \chi\,(2m, x)\, dx = \frac{(-1)^{m-1}\sqrt{3}}{(2\pi)^{2m+1}} R_{2m+1}$, wobei (29)

$$R_{2m+1} = 1 - \frac{1}{2^{2m+1}} + \frac{1}{4^{2m+1}} - \frac{1}{5^{2m+1}} + - \cdots\cdots = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{(3\lambda-2)^{2m+1}} - \frac{1}{(3\lambda-1)^{2m+1}}.$$

Die Funktion R_{2m+1} lässt sich unter Anwendung der Formel

$$\frac{1}{k^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-kx} x^{a-1}\, dx \quad (\alpha)$$

aus der Theorie der Gammafunktion [41]) in ein bestimmtes Integral verwandeln, so dass wird

$$R_{2m+1} = \frac{1}{(2m)!}\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}\left\{e^{-x}-e^{-2x}\right\}}{1-e^{-3x}}\,dx, \quad \text{somit folgt}$$

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \chi(2m, x)\,dx = \frac{(-1)^{m-1}\sqrt{3}}{(2\pi)^{2m+1}\Gamma(2m+1)}\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}\left\{e^{-x}-e^{-2x}\right\}dx}{1-e^{-3x}}. \quad (30)$$

Analog ist $$\int_0^{\frac{1}{4}} \chi(2m, x)\,dx = \frac{(-1)^{m-1}\,2}{(2\pi)^{2m+1}}\,H_{2m+1}, \quad \text{wobei} \quad (31)$$

$$H_{2m+1} = 1 - \frac{1}{3^{2m+1}} + \frac{1}{5^{2m+1}} - \frac{1}{7^{2m+1}}$$

$$+ - \cdots\cdots = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^{\lambda-1}}{(2\lambda-1)^{2m+1}}.$$

Durch Anwendung derselben Formel (α) wird

$$H_{2m+1} = \frac{1}{\Gamma(2m+1)}\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{e^{x}+e^{-x}}\,dx = \frac{1}{2\Gamma(2m+1)}\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{\operatorname{cof} x}\,dx,$$

also $$\int_0^{\frac{1}{4}} \chi(2m, x)\,dx = \frac{(-1)^{m-1}\,2}{(2\pi)^{2m+1}\Gamma(2m+1)}\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{e^{x}+e^{-x}}\,dx$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}}{(2\pi)^{2m+1}\Gamma(2m+1)}\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{\operatorname{cof} x}\,dx. \quad (32)$$

Entsprechend folgt

$$\int_0^{\frac{1}{6}} \chi(2m, x)\,dx = \frac{(-1)^{m-1}\sqrt{3}}{(2\pi)^{2m+1}}\,G_{2m+1}, \quad \text{wobei} \quad (33)$$

$$G_{2m+1} = 1 + \frac{1}{2^{2m+1}} - \frac{1}{4^{2m+1}} - \frac{1}{5^{2m+1}}$$

$$+ + - - \cdots\cdots = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^{\lambda-1}}{(3\lambda-2)^{2m+1}} + \frac{(-1)^{\lambda-1}}{(3\lambda-1)^{2m+1}}.$$

Wie früher durch Integrale dargestellt, wird

$$G_{2m+1} = \frac{1}{\Gamma(2m+1)} \int_0^\infty \frac{x^{2m}\left\{e^{-x}+e^{-2x}\right\}}{1+e^{-3x}}\,dx, \qquad \text{somit}$$

$$\int_0^{\frac{1}{6}} \chi(2m, x)\,dx = \frac{(-1)^{m-1}\sqrt{3}}{(2\pi)^{2m+1}\Gamma(2m+1)} \int_0^\infty \frac{x^{2m}\left\{e^{-x}+e^{-2x}\right\}}{1+e^{-3x}}\,dx. \quad (34)$$

2. Für die ungerade Bernoullische Funktion.

Hier vereinfachen sich die Werte bedeutend, da wir alle durch Bernoullische Zahlen ausdrücken können. Gestützt auf (6) werden, wenn wir wieder der Reihe nach für die obere Grenze $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$ und für die untere Grenze stets 0 setzen, folgende Formeln auf einfache Weise, durch Einsetzen der von früher her bekannten Formeln (9), (13), (16) und (14), entstehen

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \chi(2m-1, x)\,dx = (-1)^m \frac{1}{2} \cdot \frac{3^{2m}-1}{3^{2m-1}} \cdot \frac{B_m}{(2m)!}. \quad (35)$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \chi(2m-1, x)\,dx = (-1)^m \frac{2^{4m-1}+2^{2m-1}-1}{2^{4m-1}} \cdot \frac{B_m}{(2m)!}. \quad (36)$$

$$\int_0^{\frac{1}{6}} \chi(2m-1, x)\,dx = (-1)^m \frac{1}{2} \cdot \frac{6^{2m-1}-3^{2m-1}+2^{2m-1}-1}{6^{2m-1}} \cdot \frac{B_m}{(2m)!}. \quad (37)$$

B. Integrale mit trig. Funktionen.

Nehmen wir r als positive ganze Zahl an, so wird nach (25)

$$\int_0^1 \chi(2m+1, x)\cos 2r\pi x\,dx = \frac{(-1)^{m-1}2}{(2\pi)^{2m+1}} \int_0^1 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin 2\lambda\pi x}{\lambda^{2m+1}} \cos 2r\pi x\,dx;$$

da aber $\int_0^1 \sin 2\lambda\pi x \cdot \cos 2r\pi x\,dx = 0$ für alle Werte von λ, so folgt

$$\int_0^1 \chi(2m+1, x)\cos 2r\pi x\,dx = 0. \quad (38)$$

Da wir auf die Auswertung eines analogen Integrales kommen, wenn wir die gerade Bernoullische Funktion mit $\sin 2r\pi x\,dx$ kombinieren, so wird, was auch direkt hätte gezeigt werden können,

$$\int_0^1 \chi(2m, x) \sin 2r\pi x\,dx = 0. \tag{39}$$

Wir verbinden nun gleichartige Bernoullische Funktionen und trig. Funktionen; es wird

$$\int_0^1 \chi(2m, x) \cos 2r\pi x\,dx = \frac{(-1)^{m-1} 2}{(2\pi)^{2m}} \int_0^1 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos 2\pi\lambda x}{\lambda^{2m}} \cos 2r\pi x\,dx.$$

Der Ausdruck $\int_0^1 \cos 2\pi\lambda x \cdot \cos 2r\pi x\,dx$ verschwindet für alle Werte des ganzzahligen λ, mit Ausnahme von $\lambda = r$; dafür wird

$$\int_0^1 \cos^2 2r\pi x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Von der Summation unter dem Integralzeichen bleibt somit nur $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^{2m}}$; daher wird

$$\int_0^1 \chi(2m, x) \cos 2r\pi x\,dx = \frac{(-1)^{m-1}}{(2\pi r)^{2m}}. \tag{40}$$

Die entsprechenden Erläuterungen gelten auch für die ungerade Bernoullische Funktion verbunden mit $\sin 2r\pi x\,dx$; also

$$\int_0^1 \chi(2m+1, x) \sin 2r\pi x\,dx = \frac{(-1)^{m-1}}{(2\pi r)^{2m+1}}. \tag{41}$$

Daraus ergibt sich der

Satz: Die Integrale einer Bernoullischen Funktion verbunden mit einer ungleichartigen trig. Funktion werden zu Null, verbunden mit einer gleichartigen nehmen sie einen bestimmten Wert an.

Wir könnten auch Integrale mit den trigonometrischen Funktionen im Nenner untersuchen; doch würden uns diese Untersuchungen zu weit vom eigentlichen Thema wegführen.

C. Integrale von Produkten der χ-Funktion.

Wir gehen wieder von den Formeln (23) und (25) aus und unterscheiden:

1. Beide Bernoullischen Funktionen seien gerade. Dann wird

$$J = \int_0^1 \chi(2m, x)\,\chi(2n, x)\,dx$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}\,2\,(-1)^{n-1}\,2}{(2\pi)^{2m}\,(2\pi)^{2n}} \int_0^1 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos^2 2\lambda\pi x}{\lambda^{2m}\,\lambda^{2n}}\,dx.$$

Bekanntlich sind

$$\int_0^1 \cos^2 2\lambda\pi x\,dx = \frac{1}{2}; \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \cos^2 2\lambda\pi x\,dx = \frac{1}{4}; \quad \int_0^{\frac{1}{4}} \cos^2 2\lambda\pi x\,dx = \frac{1}{8}.$$

Somit resultieren, da die Doppelsumme verschwindet, wenn wir für

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda^{2m+2n}} = S_{2m+2n}$$ den Wert in Bernoullischen Zahlen setzen,

die drei Formeln

$$\left.\begin{aligned} \int_0^1 \chi(2m, x)\,\chi(2n, x)\,dx &= \frac{(-1)^{m+n}\,B_{m+n}}{(2m+2n)!}\cdot \\ \int_0^{\frac{1}{2}} \chi(2m, x)\,\chi(2n, x)\,dx &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^{m+n}\,B_{m+n}}{(2m+2n)!}\cdot \\ \int_0^{\frac{1}{4}} \chi(2m, x)\,\chi(2n, x)\,dx &= \frac{1}{4}\cdot\frac{(-1)^{m+n}\,B_{m+n}}{(2m+2n)!}\cdot \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

Also folgt

$$\int_0^1 F(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} F(x)\,dx = 4\int_0^{\frac{1}{4}} F(x)\,dx, \qquad (43)$$

wobei $F(x) = \chi(2m, x)\,\chi(2n, x)$ ist.

Lassen wir $m = n$ werden, so verändert sich (43) nicht, nur dass dann $F(x) = \{\chi(2m, x)\}^2$ wird, während die Formeln (42) übergehen in

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^1 \{\chi(2m, x)\}^2 dx &= \frac{B_{2m}}{(4m)!},\\
\int_0^{\frac{1}{2}} \{\chi(2m, x)\}^2 dx &= \frac{1}{2}\cdot\frac{B_{2m}}{(4m)!}.\\
\int_0^{\frac{1}{4}} \{\chi(2m, x)\}^2 dx &= \frac{1}{4}\cdot\frac{B_{2m}}{(4m)!}.
\end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

2. Beide Funktionen seien ungerade. Es wird

$$\int_0^1 \chi(2m+1, x)\,\chi(2n+1, x)\,dx = \frac{(-1)^{m-1}\,2\,(-1)^{n-1}\,2}{(2\pi)^{2m+1}(2\pi)^{2n+1}} \int_0^1 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin^2 2\lambda\pi x}{\lambda^{2m+1}\lambda^{2n+1}}.$$

Es sind bekanntlich

$$\int_0^1 \sin^2 2\lambda\pi x\,dx = \frac{1}{2};\quad \int_0^{\frac{1}{4}} \sin^2 2\lambda\pi x\,dx = \frac{1}{4};\quad \int_0^{\frac{1}{8}} \sin^2 2\lambda\pi x\,dx = \frac{1}{8}.$$

Deshalb resultieren, wenn für $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda^{2m+2n+2}} = S_{2m+2n+2}$ der Wert in Bernoullischen Zahlen gesetzt wird, da die übrigen Integrale der Doppelsumme zu Null werden,

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^1 \chi(2m+1, x)\,\chi(2n+1, x)\,dx &= (-1)^{m+n}\,\frac{B_{m+n+1}}{(2m+2n+2)!}.\\
\int_0^{\frac{1}{2}} \chi(2m+1, x)\,\chi(2n+1, x)\,dx &= (-1)^{m+n}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{B_{m+n+1}}{(2m+2n+2)!}.\\
\int_0^{\frac{1}{4}} \chi(2m+1, x)\,\chi(2n+1, x)\,dx &= (-1)^{m+n}\,\frac{1}{4}\cdot\frac{B_{m+n+1}}{(2m+2n+2)!}.
\end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

Es wird also auch hier die Beziehung gelten

$$\int_0^1 G(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} G(x)\,dx = 4\int_0^{\frac{1}{4}} G(x)\,dx, \qquad \text{wobei} \qquad (46)$$

$G(x) = \chi(2m+1, x)\,\chi(2n+1, x)$.

Lassen wir wieder $m = n$ werden, so erfährt die Beziehung (46) keine Änderung, nur dass $G(x) = \{\chi(2m+1, x)\}^2$ wird; die Formeln (45) gehen dann über in

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^1 \{\chi(2m+1, x)\}^2 \, dx = \frac{B_{2m+1}}{(4m+2)!}\cdot \\
&\int_0^{\frac{1}{2}} \{\chi(2m+1, x)\}^2 \, dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{B_{2m+1}}{(4m+2)!}\cdot \\
&\int_0^{\frac{1}{4}} \{\chi(2m+1, x)\}^2 \, dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{B_{2m+1}}{(4m+2)!}\cdot
\end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

3. Eine Bernoullische Funktion sei gerade, die andere ungerade. Dann wird

$$\int_0^1 \chi(2m+1, x)\,\chi(2m, x)\,dx$$
$$= \frac{(-1)^{m-1}\,2\,(-1)^{n-1}\,2}{(2\pi)^{2m+1}(2\pi)^{2n}} \int_0^1 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin 2\lambda\pi x \,.\, \cos 2\lambda\pi x}{\lambda^{2m+1}\lambda^{2n}}\,dx.$$

Weil $\int_0^1 \sin 2\lambda\pi x \,.\, \cos 2\lambda\pi x \, dx = 0$, so wird

$$\int_0^1 \chi(2m+1, x)\,\chi(2m, x)\,dx = 0. \qquad (48)$$

Wir erkennen daraus den

Satz: Die Integrale eines Produktes zweier Bernoullischen Funktionen nehmen einen bestimmten durch Bernoullische Zahlen ausdrückbaren Wert an, wenn die beiden Bernoullischen Funktionen gleichartig, verschwinden aber, wenn dieselben ungleichartig sind.

Die Integraldarstellungen lassen sich noch beliebig weit ausdehnen; doch müssen uns diese Betrachtungen genügen.

IV. Die Definitionen nach J. W. L. Glaisher.

Nachdem Dr. Glaisher schon in einer frühern Bekanntmachung «*On series and products involving prime numbers only*»[42]) auf die Bernoullische Funktion gekommen ist, widmet er derselben eine eingehende Besprechung in der gleichen englischen Zeitschrift, betitelt «*On the Bernoullian Function*».[43]) In dieser 168 Seiten umfassenden Abhandlung gibt dieser berühmte englische Mathematiker eine grosse Menge von Formeln; ja er begnügt sich auch nicht mit einer einzigen Definition, sondern führt deren mehrere an. Wir treten hier nur auf diejenige Definition näher ein, die uns für die allgemeinste und bequemste erscheint, ohne dabei die übrigen zu vernachlässigen, da wir alle aus der zu besprechenden Definition leicht herstellen können, weil sie durch einfache algebraische Beziehungen verbunden sind. Eine weitere Arbeit «*On the definite integrals connected with the Bernoullian Function*»[44]) von demselben Verfasser gibt uns eine beträchtliche Anzahl von bestimmten Integralen mit Bernoullischen Funktionen.

Die Formel, die Glaisher einer eingehenden Betrachtung unterzieht, lautet anfänglich

$$B_n(x) = \frac{x^n}{n} - \frac{1}{2}x^{n-1} + \frac{n-1}{2!}B_1 x^{n-2} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}B_2 x^{n-4} + - \cdots\cdots \quad (1)$$

§ 21. Herleitung der Definitionsgleichung.

Wie schon Raabe, so geht auch Glaisher aus von der bekannten Beziehung für $0 < x < 1$[68])

$$\sin 2\pi x + \frac{\sin 4\pi x}{2} + \frac{\sin 6\pi x}{3} + \cdots\cdots = \pi\left(\frac{1}{2} - x\right).$$

Durch Multiplikation mit dx und Integration zwischen 0 und x wird

$$\frac{1-\cos 2\pi x}{2\pi} + \frac{1-\cos 4\pi x}{8\pi} + \frac{1-\cos 6\pi x}{18\pi} + \cdots\cdots = \pi\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}\right);$$

multiplizieren wir mit (-2π) und zerreissen dann, so folgt, weil

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\cdots = S_2 = \frac{\pi^2}{3}.$$

$$\cos 2\pi x + \frac{\cos 4\pi x}{2^2} + \frac{\cos 6\pi x}{3^2} + \cdots\cdots = 2\pi^2 \left\{ \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{6} \right\}.$$

Durch wiederholte Integration und Multiplikation mit (-2π) entstehen nacheinander

$$\sin 2\pi x + \frac{\sin 4\pi x}{2^3} + \frac{\sin 6\pi x}{3^3} + \cdots = \frac{2^2\pi^3}{2!} \left\{ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} \right\}.$$

$$\cos 2\pi x + \frac{\cos 4\pi x}{2^4} + \frac{\cos 6\pi x}{3^4} + \cdots\cdots = \frac{-2^3\pi^4}{3!} \left\{ \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{B_2}{4} \right\}.$$

$$\cos 2\pi x + \frac{\cos 4\pi x}{2^{2n}} + \frac{\cos 6\pi x}{3^{2n}} + \cdots\cdots = \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1} \pi^{2n}}{(2n-1)!} \left\{ B_{2n}(x) + (-1)^{n-1} \frac{B_n}{2n} \right\}. \quad (2)$$

$$\sin 2\pi x + \frac{\sin 4\pi x}{2^{2n+1}} + \frac{\sin 6\pi x}{3^{2n+1}} + \cdots\cdots = \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n} \pi^{2n+1}}{(2n)!} B_{2n+1}(x). \quad (3)$$

Darin bedeuten $B_n(x)$ die Klammerausdrücke der obern Formeln; es sind dies die *«Bernoullischen Funktionen»*. Die beiden Formeln (2) und (3), wie auch die frühern, sind rationale und integrierbare Funktionen von x. Der erste Term von (2) ist von der $(2n)^{ten}$ Ordnung; der letzte Term der Bernoullischen Funktion in (2) ist vom 2ten Grade in x; der erste Term der Bernoullischen Funktion in (3) ist vom $(2n+1)^{ten}$ Grade, während der letzte in Bezug auf x linear ist. Also ist nach dieser Definition $B_n(x)$ eine Funktion von x, *die keinen von x freien Ausdruck enthalten darf.* Der Ausdruck, der von x unabhängig ist in den obigen Entwicklungen, stellt stets den Wert der Reihe $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots\cdots$, ausgedrückt in Bernoullischen Zahlen, dar.

Diese Definition der Bernoullischen Funktion stimmt nun ganz mit derjenigen von Raabe überein, wie auch Glaisher bei seinen ersten Untersuchungen über diese Funktion die Raabesche Definition benutzt hat, und es ist

$$B_{2n+1}(x) = B''(x) \qquad \text{und} \qquad B_{2n+2}(x) = B'(x).$$

Glaisher führt dann die Untersuchung über diese $B_n(x)$-Funktion in ausführlicher Weise durch, wobei er Raabe in vielem wesentlich ergänzt. Er berührt anfangs ganz kurz die Funktion mit inversem Argument, dann die einfachen Ableitungen und gibt die Spezialwerte für $x = 0$ und $x = 1$. Sodann leitet er Reihenentwicklungen ab, in welchen die Bernoullischen Funktionen als Koeffizienten auftreten.

Alles dies sind Eigenschaften, die mit der Raabeschen Auffassung übereinstimmen und bei denjenigen von Schlömilch und Schläfli zu entsprechenden Resultaten führen.

Glaisher erwähnt auch, dass die Bernoullischen Funktionen die Koeffizienten der Entwicklung $\frac{e^{ax}-1}{e^a-1}$ darstellen und leitet mit Hülfe dieser Auffassung einige Eigenschaften her. Hernach gibt er ähnliche Beziehungen von aufeinanderfolgenden Bernoullischen Funktionen dieser Definition, entsprechend den Darstellungen bei den früher betrachteten Definitionen, und erwähnt auch die Funktion mit negativem Argument.[45])

Uns interessiert diese $B_n(x)$-Funktion weniger, weil sie mit derjenigen von Raabe übereinstimmt und weil dieselbe zu wenig allgemein ist, da auf der rechten Seite die Reihe mit dem Gliede in x^2 oder x abschliesst. Auch Glaisher sah sich gezwungen, zur Vereinfachung der Koeffizienten der Entwicklung nach $B_n(x)$-Funktionen

$$a\frac{e^{a(2x-1)}+e^{-a(2x-1)}}{e^a-e^{-a}} = 1 + (2a)^2\left\{B_2(x)+\frac{B_1}{2}\right\} + \frac{(2a)^4}{3!}\left\{B_4(x)-\frac{B_2}{4}\right\}+\cdots\cdots$$

für die Klammerausdrücke einfachere Funktionen einzuführen, und er thut dies, indem er setzt

$$A_{2n}(x) = B_{2n}(x) + (-1)^{n-1}\frac{B_n}{2n}; \quad A_{2n+1}(x) = B_{2n+1}(x). \qquad (n>0).$$

Er selbst sagt, dass diese neue Funktion $A_n(x)$ als analytische Funktion praktischer sei, da sie weniger komplizierte und systematischere Resultate liefere. Da jetzt bei der geraden Bernoullischen Funktion durch diese Setzung auch ein von x freier Term vorkommen darf, so steht diese Funktion in enger Beziehung zu derjenigen von Schläfli.[46])

Nach obigen Erläuterungen werden somit

$$A_{2n}(x) = \frac{1}{2n}\left\{x^{2n} - \frac{1}{2}\,2n\,x^{2n-1} + \binom{2n}{2} B_1 x^{2n-2} \right.$$
$$\left. - + \cdots\cdots ; + (-1)^n \binom{2n}{2n-2} B_{n-1} x^2 + (-1)^{n+1} B_n \right\}.$$

$$A_{2n+1}(x) = \frac{1}{2n+1}\left\{x^{2n+1} - \frac{1}{2}(2n+1)x^{2n} + \binom{2n+1}{2} B_1 x^{2n-1} \right.$$
$$\left. - \binom{2n+1}{4} B_2 x^{2n-3} + - \cdots\cdots (-1)^n \binom{2n+1}{2n} B_n x \right\}.$$

Die Reihen brechen von selbst ab; beide lassen sich in die allgemeinere Formel für ein beliebiges n zusammenziehen

$$A_n(x) = \frac{1}{n}\left\{x^n - \frac{n}{2} x^{n-1} + \binom{n}{2} B_1 x^{n-2} - \binom{n}{4} B_2 x^{n-4} + - \cdots\right\} \quad (4)$$

Die Reihe geht so weit, dass rechts keine negativen Koeffizienten auftreten dürfen; der letzte Term enthält $\binom{n}{n-1}$ oder $\binom{n}{n}$, je nachdem n ungerade oder gerade ist.

Diese Definition wollen wir nun eingehender betrachten.

§ 22. Die Derivierten dieser Definition.

A. Die einfachen Differentialquotienten.

Wir gehen von der Definitionsformel (4) aus und differenzieren dieselbe nach x: dann wird

$$\frac{\partial}{\partial x} A_n(x) = x^{n-1} - \frac{1}{2}(n-1)\,x^{n-2} + \binom{n-1}{2} B_1 x^{n-3}$$
$$- \binom{n-1}{4} B_2 x^{n-5} + - \cdots\cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial x} A_n(x) = (n-1)\,A_{n-1}(x). \quad (5)$$

Diese Formel geht für $n = 2m$ und $n = (2m+1)$ in die entsprechenden Spezialformeln für die geraden und ungeraden Bernoullischen Funktionen der Definitionen von Raabe und Schlömilch über. Hier sind die zwei Spezialfälle in *eine* Formel zusammengefasst; nur steht noch ein Faktor vor der Bernoullischen Funktion, der bei der Schläflischen Definition fehlt. Schon dies ist ein Grund, dass die Definition von Schläfli den Vorzug verdient, da die einfachen Ableitungen der χ-Funktionen wieder reine χ-Funktionen liefern.

B. Die wiederholten Ableitungen.

Solche finden sich bei Glaisher nirgends; dieselben sind jedoch leicht zu erhalten; doch tritt stets ein komplizierender Faktor hinzu; wie leicht herzuleiten, wird, wenn symbolisch $D^\lambda = \frac{\partial^\lambda}{\partial x^\lambda}$,

$$D^\lambda A_n(x) = \lambda! \binom{n}{\lambda} A_{n-\lambda}(x). \qquad (6)$$

Schläflis Definition ist also auch in dieser Hinsicht einfacher, da dieselbe auch hier keinen vorgesetzten Faktor zeigt.

C. Einfache Integralformeln.

Multiplizieren wir (5) mit dx und integrieren zwischen 0 und x, so wird $\int_0^x A_{n-1}(x)\,dx = \left\{ \frac{A_n(x)}{n-1} \right\}_0^x$;

durch Trennung der geraden von der ungeraden Bernoullischen Funktion folgen $\int_0^x A_{2n}(x)\,dx = \frac{1}{2n} A_{2n+1}(x)$ und (7)

$$\int_0^x A_{2n-1}(x)\,dx = \frac{1}{2n-1}\left\{ A_{2n}(x) + (-1)^n \frac{B_n}{2n} \right\}, \qquad (8)$$

wenn die später zu beweisenden Spezialwerte für $A_{2n+1}(0) = 0$ und $A_{2n}(0) = (-1)^n \frac{B_n}{2n}$ eingesetzt werden.[47])

Aus obigen 2 Formeln ergeben sich für die obere Grenze $x = 1$

$$\int_0^1 A_{2n}(x)\,dx = 0; \quad \int_0^1 A_{2n-1}(x)\,dx = 0. \qquad (9)$$

Für die obere Grenze $x = \frac{1}{2}$ werden unter Berücksichtigung von[47])

$$A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^n \frac{B_n}{n} \cdot \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}} \quad \text{und} \quad A_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} A_{2n}(x)\,dx = 0; \quad \int_0^{\frac{1}{2}} A_{2n-1}(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{(2n-1)} (-1)^n \frac{B_n}{n} \cdot \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}}. \qquad (10)$$

Auch diese Formeln (7), (8) und (10) zeigen einen vorgesetzten Faktor, der bei den entsprechenden Formeln von Schläfli wegfällt.

§ 23. Die $A_n(x)$-Funktion mit inversem Argument.

Glaisher tritt auf diese Funktion nicht näher ein; er gibt nur die Hauptformel, ohne auf ihre Herleitung einzugehen.[48]) Wir gelangen jedoch auf einfache Weise zu diesen Beziehungen, wenn wir ausgehen von den später herzuleitenden Reihenentwicklungen (23) und (24).[49]) Ersetzen wir in (24) x durch (1—x), so wird unter Anwendung von $\sin 2\lambda\pi(1-x) = -\sin 2\lambda\pi x$

$$-\left\{\sin 2\pi x + \frac{\sin 4\pi x}{2^{2n+1}} + \frac{\sin 6\pi x}{3^{2n+1}} + \cdots\right\} = (-1)^{n+1}\frac{2^{2n}\pi^{2n+1}}{(2n)!}A_{2n+1}(1-x)$$

und durch Vergleichung dieser Formel mit (24)

$$A_{2n+1}(x) = -A_{2n+1}(1-x). \qquad (\alpha)$$

Setzen wir in (23) für x den Wert (1—x), so erhalten wir unter Berücksichtigung von $\cos 2\lambda\pi(1-x) = \cos 2\lambda\pi x$ genau wieder dieselbe Formel (23), also

$$A_{2n}(x) = A_{2n}(1-x). \qquad (\beta)$$

Diese zwei letzten Formeln (α) und (β) lassen sich zusammenziehen zu der allgemeinern Formel

$$A_n(1-x) = (-1)^n A_n(x). \qquad (11)$$

Aus dieser Formel ergeben sich unter Berücksichtigung der Definitionsgleichung (4) mit Leichtigkeit

$$A_{2n}(0) = A_{2n}(1) = (-1)^{n-1}\frac{B_n}{2n} \quad \text{und} \qquad (12)$$

$$A_{2n+1}(0) = A_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = A_{2n+1}(1) = 0. \qquad (13)$$

Vervielfachung des Argumentes.

Die Herleitung der Formeln dafür ist hier bedeutend umständlicher als bei Schlömilch und Schläfli, da Glaisher zuerst eine Reihenentwicklung suchen muss, in welcher die Bernoullischen Funktionen als Koeffizienten auftreten; von diesem Momente an ist das Verfahren analog dem bei Schläfli.

Er geht aus von der bekannten, für $0 < x < 1$ geltenden Beziehung[50])

$$\frac{1}{2}\pi\,\frac{e^{a\pi(1-2x)}-e^{-a\pi(1-2x)}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}=\frac{\sin 2\pi x}{1^2+a^2}+\frac{2\sin 4\pi x}{2^2+a^2}$$

$$+\frac{3\sin 6\pi x}{3^2+a^2}+\cdots\cdots$$

Entwickeln wir die einzelnen Glieder der rechten Seite nach Potenzen von a^2 und nehmen die gleichartigen zusammen, so sind nach (24) die Koeffizienten der Potenzen von a Bernoullische Funktionen, und es wird, wenn zugleich mit a multipliziert und dann $a\pi$ durch a ersetzt wird,

$$a\,\frac{e^{a(1-2x)}-e^{-a(1-2x)}}{e^{a}-e^{-a}}=-2a\,A_1(x)-\frac{(2a)^3}{2!}A_3(x)$$

$$-\frac{(2a)^5}{4!}A_5(x)-\cdots\cdots \qquad (\gamma)$$

Es ist dies eine nach ungeraden Bernoullischen Funktionen fortschreitende Entwicklung.

Analog wird aus der bekannten Gleichung[50])

$$\frac{1}{2}a\pi\,\frac{e^{a\pi(1-2x)}+e^{-a\pi(1-2x)}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}=\frac{1}{2}+\frac{a^2\cos 2\pi x}{1^2+a^2}$$

$$+\frac{a^2\cos 4\pi x}{2^2+a^2}+\cdots\cdots$$

durch Entwicklung nach Potenzen von a, Multiplikation mit 2 und Ersetzen von $a\pi$ durch a

$$a\,\frac{e^{a(1-2x)}+e^{-a(1-2x)}}{e^{a}-e^{-a}}=1+(2a)^2A_2(x)+\frac{(2a)^4}{3!}A_4(x)$$

$$+\frac{(2a)^6}{5!}A_6(x)+\cdots\cdots, \qquad (\delta)$$

also eine nach geraden Bernoullischen Funktionen fortschreitende Entwicklung. Addieren wir diese beiden Entwicklungen (γ) und (δ), nachdem wir in denselben a durch (—a) ersetzt haben, so resultiert eine neue, nach aufeinanderfolgenden $A_n(x)$-Funktionen fortschreitende Reihe, nämlich

$$2a\,\frac{e^{a(2x-1)}}{e^{a}-e^{-a}}=1+2a\,A_1(x)+\frac{(2a)^2}{1!}A_2(x)+\frac{(2a)^3}{2!}A_3(x)+\cdots\cdots$$

Setzen wir darin für 2a den Wert a und multiplizieren dann Zähler und Nenner mit $e^{\frac{a}{2}}$, so wird

$$a\frac{e^{ax}}{e^a-1}=1+a\,A_1(x)+a^2A_2(x)+\frac{a^3}{2!}A_3(x)+\frac{a^4}{3!}A_4(x)+\cdots \quad (14)$$

Es ist dies eine elegante Entwicklung, woraus ersichtlich ist, dass

$$A_n(x)=\left[\frac{a^n}{(n-1)!}\right] \text{ in der Entwicklung } a\frac{e^{ax}}{e^a-1}.$$

Von dieser Entwicklung geht, wie wir gesehen haben, Schläfli aus, indem er die Fakultäten der obigen Entwicklung auch noch zur Bernoullischen Funktion mitnimmt; ausgehend von dieser Eigenschaft leitet er dann die wesentlichen Eigenschaften der Bernoullischen Funktion her. Bei Glaisher tritt diese Beziehung nicht so in den Vordergrund, wie sie es verdiente; er leitet zwar einige Formeln durch Koeffizientenvergleichung gleichwertiger Entwicklungen her[51]) und gibt später die Bernoullische Funktion noch als Koeffizient einer andern Entwicklung. *Ein reiner Koeffizient einer solchen Entwicklung ist die Definition von Glaisher nicht.*

Gestützt auf Koeffizientenvergleichung kommt nun auch Glaisher auf die Vervielfachung des Argumentes. Ist k eine positive, ganze Zahl, setzen wir in der letzten Entwicklung für x der Reihe nach die Werte $x, x+\frac{1}{k}, \ldots\ldots\ldots, x+\frac{k-1}{k}$ und addieren dann alle diese Entwicklungen, so wird die Summe

$$S=A_n(x)+A_n\left(x+\frac{1}{k}\right)+\cdots\cdots+A_n\left(x+\frac{k-1}{k}\right)$$

$$=\left[a^n\right] \text{ in } \frac{a}{e^a-1}e^{ax}\left\{1+e^{\frac{a}{k}}+e^{\frac{2a}{k}}+\cdots\cdots+e^{\frac{(k-1)a}{k}}\right\}$$

$$=\left[a^n\right] \text{ in } \left(\frac{a}{k}\right)\frac{k\,e^{\frac{a}{k}(kx)}}{e^{\frac{a}{k}}-1}=\frac{1}{k^{n-1}}A_n(kx);\ \text{daher}$$

$$A_n(x)+A_n\left(x+\frac{1}{k}\right)+\cdots+A_n\left(x+\frac{k-1}{k}\right)=\frac{1}{k^{n-1}}A_n(kx) \quad (15)$$

Setzen wir $x=0$, so müssen wir die zwei Fälle $n=$ gerade und $n=$ ungerade unterscheiden; es werden für

n = ungerade

$$A_n\left(\frac{1}{k}\right)+A_n\left(\frac{2}{k}\right)+\cdots\cdots+A_n\left(\frac{k-1}{k}\right)=0 \quad \text{und für} \quad (15^a)$$

n = gerade

$$A_n\left(\frac{1}{k}\right)+A_n\left(\frac{2}{k}\right)+\cdots\cdots+A_n\left(\frac{k-1}{k}\right)$$
$$=(-1)^{\frac{1}{2}n}\left\{1-\frac{1}{k^{n-1}}\right\}\frac{B\frac{1}{2}n}{n}. \quad (15^b)$$

Aus diesen Formeln lassen sich mit Leichtigkeit verschiedene Spezialwerte für die Argumente $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$ berechnen; für einzelne Argumente können wir auch direkt von der Definitionssummenformel ausgehen.

A. Berechnung von $A_n\left(\frac{1}{2}\right)$. Aus den Formeln ($15^{a \text{ und } b}$) folgt sofort für $k=2$

$$A_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)=0 \qquad \text{und} \qquad A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)=(-1)^n\frac{2^{2n-1}-1}{2^{2n}}\cdot\frac{B_n}{n}. \quad (16)$$

B. Berechnung von $A_{2n}\left(\frac{1}{4}\right)$. Die ungeraden Bernoullischen Funktionen können wir mit Formel (15^a) nicht berechnen, da wir stets auf die identische Gleichung $0=0$ geführt werden. Gehen wir von der Summenformel für $A_{2n+1}(x)$ aus, so gelangen wir auf «Eulersche Zahlen»; da wir jedoch dieselben zu unsern Untersuchungen nie herbeigezogen haben, so wollen wir auch hier nicht auf diese Sache eintreten, besonders da diese Untersuchungen für alle betrachteten Definitionen in analoger Weise durchgeführt werden können.

Dagegen wird aus (15^b) unter Berücksichtigung des Wertes für $A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)$ in Formel (16)

$$A_{2n}\left(\frac{1}{4}\right)=(-1)^n\frac{B_n}{n}\cdot\frac{2^{2n-1}-1}{2^{4n}}. \quad (17)$$

C. Berechnung von $A_{2n}\left(\frac{1}{3}\right)$. Glaisher geht von der trig. Summenformel aus, um diesen Wert zu erhalten; ganz einfach erhalten wir dieselbe aus (15^b) für $k=3$ unter Anwendung von $A_{2n}\left(\frac{1}{3}\right)=A_{2n}\left(\frac{2}{3}\right)$; es wird dann

$$A_{2n}\left(\frac{1}{3}\right)=(-1)^n\left\{\frac{3^{2n-1}-1}{3^{2n-1}}\right\}\frac{B_n}{4n}. \quad (18)$$

D. Berechnung von $A_{2n}\left(\frac{1}{6}\right)$. Setzen wir in (15^b) $k = 6$ und erinnern uns, dass $A_{2n}\left(\frac{1}{3}\right) = A_{2n}\left(\frac{2}{3}\right)$ und $A_{2n}\left(\frac{1}{6}\right) = A_{2n}\left(\frac{5}{6}\right)$, so wird

$$2\,A_{2n}\left(\frac{1}{6}\right) = (-1)^n \left\{ \frac{6^{2n-1}-1}{6^{2n-1}} \right\} \frac{B_n}{2n} - 2\,A_{2n}\left(\frac{1}{3}\right) - A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right);$$

die Werte für $A_{2n}\left(\frac{1}{3}\right)$ und $A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)$ eingesetzt, gibt

$$A_{2n}\left(\frac{1}{6}\right) = (-1)^n \frac{B_n}{4n} \left\{ \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n-1}} - \frac{1}{6^{2n-1}} - 1 \right\}. \quad (19)$$

Auf gleiche Weise könnten wir die Werte der geraden Bernoullischen Funktionen für die Argumente $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{16}$ u. s. w. berechnen, würden aber zu komplizierten Formeln gelangen.

Glaisher gibt dann eine grosse Zahl von Reihenentwicklungen, in denen diese Spezialfunktionen, sowohl die $B_n(x)$- als auch die $A_n(x)$-Funktion, ja sogar noch weitere etwas von diesen abweichende Definitionen für die Argumente $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{12}$ als Koeffizienten auftreten[52]); auf die weitern von Glaisher eingeführten Definitionen werden wir später noch zu sprechen kommen.[53])

Im Verlaufe seiner Arbeit führt dann Glaisher noch eine Menge, den Eulerschen Zahlen ähnliche Zahlen J, I, H, P, Q, R und T ein, die in Beziehungen stehen mit algebraischen Reihenentwicklungen.[54]) Er widmet den Untersuchungen dieser Zahlen und Entwicklungen grosse Aufmerksamkeit; ihm gebührt das Verdienst, diese zuerst eingeführt zu haben; doch können alle diese Operationen auch an der Schläflischen Definition ausgeführt werden; die entstehenden Formeln werden ebenso einfach, ja in vielen Fällen sogar bedeutend einfacher.

§ 24. Die Funktion mit negativem Argument.

Glaisher gibt diese Funktion weder so elegant, noch so einfach wie Schläfli; die $A_n(x)$-Funktion findet sich überhaupt nicht mit negativem Argument; dagegen ist die $B_n(x)$-Funktion für $x = (-x)$ kurz erwähnt.

Er geht aus von den Entwicklungen nach Bernoullischen Funktionen, d. h., den Formeln (γ) und (δ) des vorigen §, die mit ent-

sprechender Abänderung auch für die $B_n(x)$-Funktion gelten; addieren wir beide, so folgt nach zweckmässiger Umgestaltung der linken Seite

$$\frac{e^{ax}-1}{e^a-1} = x + a\,B_2(x) + \frac{a^2}{2!}B_3(x) + \frac{a^3}{3!}B_4(x) + \cdots \qquad (20)$$

Es ist dies eine neue Entwicklung nach Bernoullischen Funktionen; aber auch hierin sind die Bernoullischen Funktionen nicht reine Koeffizienten der zugehörigen Entwicklung; diese Formel zeigt deutlich den Zusammenhang dieser Funktion mit der Definition von Schlömilch, der gerade den n-fachen Wert der $(n-1)^{ten}$ Ableitung einer solchen Entwicklung als n^{te} Bernoullische Funktion $\varphi(z, n)$ definiert.

Gestützt auf obige Beziehung (20) kommt jetzt Glaisher auf die Funktion mit negativem Argument; er multipliziert dieselbe mit e^{-ax} und erhält

$$-\frac{e^{-ax}-1}{e^a-1} = e^{-ax}\left\{x + a\,B_2(x) + \frac{a^2}{2!}B_3(x) + \frac{a^3}{3!}B_4(x) + \cdots\right\}.$$

Durch Entwicklung von e^{-ax} und nachherige Koeffizientenvergleichung wird

$$-B_n(-x) = B_n(x) - (n-1)\,x\,B_{n-1}(x) + \binom{n-1}{2}x^2 B_{n-2}(x) - + \cdots + (-1)^{n-2}x^{n-2}B_2(x) + (-1)^{n-1}x^n.$$

Dies setzt er symbolisch gleich[55])

$$-B\,(-x) = (E-x)^{n-1}B_1(x), \qquad (21)$$

wobei E ein Operationsfaktor ist, definiert durch

$$E\,B\,(x) = B_{r+1}(x);$$

es resultiert dann

$$(-1)^{n-1}B_n(1+x) = (E-x)^{n-1}B_1(x). \qquad (22)$$

Weitere Bernoullische Funktionen mit negativem Argument finden sich keine mehr; diese symbolische Darstellung ist keineswegs bequem zum Operieren; hier ist entschieden jede andere und besonders die Schläflische Definition vorzuziehen.

§ 25. Diskussion dieser Funktion.

Der einzige Unterschied dieser $A_n(x)$-Funktion, der dieselbe äusserlich nur unwesentlich von der Definition von Schläfli unterscheidet, ist der, dass Schläfli den Faktor $\frac{1}{n!}$ vor der Klammer der rechten Seite der Gleichung der n^{ten} Bernoullischen Funktion hat,

während Glaisher nur $\frac{1}{n}$. Bei der graphischen Darstellung ist dann augenscheinlich, dass der Faktor $\frac{1}{n!}$ das Konvergenzgebiet der Funktion um so mehr erweitert, je höher der Grad der Bernoullischen Funktion steigt, und dass schon deshalb die Definition von Schläfli vorzuziehen ist.

Die acht ersten Bernoullischen Funktionen dieser Definition nehmen folgende Werte an:

$$A_1(x) = x - \frac{1}{2}.$$

$$A_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}.$$

$$A_3(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x.$$

$$A_4(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{120}.$$

$$A_5(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x.$$

$$A_6(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{252}.$$

$$A_7(x) = \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{42}x.$$

$$A_8(x) = \frac{1}{8}x^8 - \frac{1}{2}x^7 + \frac{7}{12}x^6 - \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{240}.$$

Wir erkennen daraus, dass die zwei ersten Bernoullischen Funktionen dieser Definition genau mit denjenigen gleich hoher Ordnung bei Schläfli übereinstimmen; die Funktion $A_2(x)$ besitzt also ebenfalls ein Minimum bei $x = \frac{1}{2}$ vom Werte $-\frac{1}{24}$. Die Gleichung für $A_3(x)$ weist analog $\chi(3, x)$ zwischen 0 und 1 sowohl ein Minimum als ein Maximum auf. Beide liegen bei gleichem Werte von x wie für die $\chi(3, x)$-Funktion; doch wird hier der Wert der Funktion gerade 2!-mal so gross wie bei $\chi(3, x)$.

Entsprechend könnten wir weiterfahren; wir finden, *dass die Stellen der Maximal- und Minimalwerte nicht ändern, dass aber die zugehörigen Funktionswerte für diese Definition bedeutend grösser werden, je höher der Grad der Funktion ist; die Funktion nimmt rasch sehr grosse Werte an.*[56])

Die Figuren zu § 18 gelten auch für diese Definition.

§ 26. Verwandlung dieser Definition in trigonometr. Reihen.

Schon bei der Herleitung der Definitionsgleichung ist Glaisher zu trigonometrischen Reihen als Werte für Bernoullische Funktionen gelangt; wir brauchen nur für die $B_n(x)$-Funktion in den Formeln (2) und (3) die allgemeinere $A_n(x)$-Definition einzusetzen; dann resultieren

$$A_{2n}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}\,\pi^{2n}} \left\{ \cos 2\pi x + \frac{\cos 4\pi x}{2^{2n}} + \frac{\cos 6\pi x}{3^{2n}} + \cdots \right\}. \quad (23)$$

$$A_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,\pi^{2n+1}} \left\{ \sin 2\pi x + \frac{\sin 4\pi x}{2^{2n+1}} + \frac{\sin 6\pi x}{3^{2n+1}} + \cdots \right\}. \quad (24)$$

Wir wären auch zu denselben Resultaten gelangt, wenn wir uns auf die Theorie der Fourierschen Reihen und Integrale gestützt und für die Funktion $f(x)$ die Bernoullische Funktion $A_n(x)$ eingeführt hätten; wie schon bei Schläfli, so gelangen wir auch hier rascher ans Ziel als Schlömilch, weil das entstehende Integral leichter zu lösen ist.

§ 27. Integrale mit $A_n(x)$-Funktionen.

Während Glaisher in seinen zwei ersten, diesen Gegenstand behandelnden Schriften gar keine Integrale mit Bernoullischen Funktionen gibt, behandelt er die Integraldarstellungen dieser Funktion sehr eingehend in seiner dritten, bereits erwähnten Schrift «On the definite integrals connected with the Bernoullian function.»

Er geht darin von den Summenformeln des Sinus und Cosinus aus[57]) und leitet auf analoge Weise, wie die Untersuchungen von § 20 des vorhergehenden Abschnittes zeigen, seine Integrale her. Trotz des Unterschiedes beider Definitionen bleibt ja die Art des Herleitens dieselbe; wir wollen deshalb hier nicht noch einmal dieselben Ableitungen vornehmen, sondern begnügen uns mit der Angabe der erhaltenen Resultate; ein Vergleich der entsprechenden Formeln, die stets sehr ähnlich aussehen, zeigt jedoch, dass diejenigen der Definition von Schläfli noch etwas einfacher aussehen, vorausgesetzt, dass sie in der Form nicht *ganz* übereinstimmen.

A. Einfache Integrale.

1. Mit der ungeraden Bernoullischen Funktion. Gestützt auf (8) werden für die Spezialwerte der obern Grenze $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$

$$(2n-1)\int_0^{\frac{1}{2}} A_{2n-1}(x)\,dx = (-1)^n \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} \cdot \frac{B_n}{2n}. \tag{25}$$

$$(2n-1)\int_0^{\frac{1}{3}} A_{2n-1}(x)\,dx = (-1)^n \frac{3^{2n}-1}{3^{2n-1}} \cdot \frac{B_n}{4n}. \tag{26}$$

$$(2n-1)\int_0^{\frac{1}{4}} A_{2n-1}(x)\,dx = (-1)^n \frac{4^{2n}+2^{2n}-2}{4^{2n}} \cdot \frac{B_n}{2n}. \tag{27}$$

$$(2n-1)\int_0^{\frac{1}{6}} A_{2n-1}(x)\,dx = (-1)^n \frac{6^{2n}+2\cdot 3^{2n}+3\cdot 2^{2n}-6}{6^{2n}} \cdot \frac{B_n}{4n}. \tag{28}$$

Hier kompliziert also der vor dem Integral stehende Faktor $(2n-1)$.

2. Mit der geraden Bernoullischen Funktion. Gestützt auf Formel (7) werden, wenn wir zur Abkürzung die von Glaisher eingeführten Zahlen wählen,[58])

$$2n\int_0^{\frac{1}{2}} A_{2n}(x)\,dx = 0. \tag{29}$$

$$2n\int_0^{\frac{1}{3}} A_{2n}(x)\,dx = (-1)^{n+1} \frac{I_n}{3^{2n+1}}. \tag{30}$$

$$2n\int_0^{\frac{1}{4}} A_{2n}(x)\,dx = (-1)^{n+1} \frac{E_n}{4^{2n+1}}. \tag{31}$$

$$2n\int_0^{\frac{1}{6}} A_{2n}(x)\,dx = (-1)^{n+1} \frac{J_n}{6^{2n+1}}. \tag{32}$$

B. Integrale mit trig. Funktionen.

Durch analoges Verfahren wie in § 20[B] werden

$$\int_0^1 A_{2n+1}(x)\sin 2r\pi x\,dx = (-1)^{n+1} \frac{(2n)!}{(2r\pi)^{2n+1}}. \tag{33}$$

$$\int_0^1 A_{2n+1}(x) \cos 2r\pi x \, dx = 0. \tag{34}$$

$$\int_0^1 A_{2n}(x) \cos 2r\pi x \, dx = (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!}{(2r\pi)^{2n}}. \tag{35}$$

$$\int_0^1 A_{2n}(x) \sin 2r\pi x \, dx = 0. \tag{36}$$

Auch hier bedeutet r eine positive ganze Zahl; die Formeln (33) und (35) weisen wieder einen Faktor mehr auf, als die entsprechenden der Schläflischen Definition.

C. Integrale von Produkten.

Gestützt auf die Multiplikation der Summenformeln (23) und (24) werden durch nachherige Integration

$$\int_0^1 A_{2m+1}(x) A_{2n+1}(x) \, dx = (-1)^{m+n} \frac{(2m)! \, (2n)!}{(2m+2n+2)!} B_{m+n+1}. \tag{37}$$

$$\int_0^1 A_{2m}(x) A_{2n}(x) \, dx = (-1)^{m+n} \frac{(2m-1)! \, (2n-1)!}{(2m+2n)} B_{m+n}. \tag{38}$$

$$\int_0^1 A_{2m+1}(x) A_{2n}(x) \, dx = \int_0^1 A_{2m}(x) A_{2n+1}(x) \, dx = 0. \tag{39}$$

Für $n = m$ werden die zwei erstern Formeln

$$\int_0^1 \left\{A_{2n+1}(x)\right\}^2 dx = \frac{\left\{(2n)!\right\}^2}{(4n+2)!} B_{2n+1} \qquad \text{und} \tag{40}$$

$$\int_0^1 \left\{A_{2n}(x)\right\}^2 dx = \frac{\left\{(2n-1)!\right\}^2}{(4n)!} B_{2n}. \tag{41}$$

Wir könnten auch hier wieder als obere Grenze $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ wählen, worauf diese Integrale den 2ten (4ten) Teil der obigen Integrale (37) und (38) oder (40) und (41) ausmachen würden.

Ein Vergleich mit den Formeln bei Schläflis Definition zeigt, dass die Formeln der $\chi(n, x)$-Funktion wieder einfachere Gestalt aufweisen.

Auch diese Integralbetrachtungen könnten natürlich beliebig weit ausgedehnt werden.[59])

§ 28. Andere Definitionen von Glaisher.

Da Glaisher im Laufe seiner Untersuchungen zu Entwicklungen kommt, welche nach fortschreitenden Funktionen $\left\{A_n(x) - 2^n A_n\left(\frac{1}{2}x\right)\right\}$ laufen, so führt er auch diese Funktion als eigene Definition ein, indem er setzt $A'_n(x) = A_n(x) - 2^n A_n\left(\frac{1}{2}x\right)$.

Er führt dann die Betrachtung dieser $A'_n(x)$-Funktion entsprechend derjenigen der $A_n(x)$-Funktion durch und gelangt auch zu ganz entsprechenden Resultaten, ohne aber neue Gesichtspunkte aufzudecken. Vorteile bietet diese Funktion keine, da keine der Formeln eine wesentliche Änderung erfahren.[60])

In derselben Arbeit führt Glaisher noch zwei weitere Definitionen der Bernoullischen Funktion ein, die in sehr engem Zusammenhang mit den früher erwähnten Definitionen stehen, da er setzt

$$V_n(x) = n A_n(x) \qquad \text{und} \qquad U_n(x) = n A'_n(x).$$

Diese beiden schmiegen sich jeweilen eng an die $A_n(x)$- resp. $A'_n(x)$-Funktion an.

Trotzdem jetzt die Definitionsformeln den allgemeinen Nenner $\frac{1}{n}$ der rechten Seite nicht mehr besitzen, werden die daraus abgeleiteten Formeln nicht einfacher; nach Glaisher sollen sie sich besser zur symbolischen Darstellung eignen als seine früher erwähnten Definitionen. Während Glaishers $B_n(x)$-Funktion mit der Raabeschen Definition übereinstimmt, stimmt seine $V_n(x)$-Funktion mit der Schlömilchschen $\varphi(x, n)$-Funktion überein. Die Untersuchung dieser beiden Funktionen geht ähnlich vor sich, wie die Betrachtung seiner erstern Definitionen; doch wird dabei die symbolische Darstellungsweise angewandt, wo sie überhaupt anzuwenden ist.[61])

Endlich führt derselbe Mathematiker noch zwei weitere Definitionen der Bernoullischen Funktion ein, die mit der $A_n(x)$- resp. $A'_n(x)$-Funktion verbunden sind durch die Beziehungen

$$\alpha_n(x) = A_n\left(x + \frac{1}{2}\right) \qquad \text{und} \qquad \alpha_n'(x) = A_n'\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Auch hier erfolgen die allerdings nur kurzen Betrachtungen darüber in entsprechender Weise wie bei den erstern Definitionen.[62])

V. Folgerungen.

§ 29. Zusammenhang der verschiedenen Definitionen.

Wir geben vorerst eine Übersicht der Definitionen, die wir einlässlich betrachtet haben; alle übrigen können ja aus denselben hergeleitet werden; deshalb führen wir dieselben auch bei den Vergleichungen der einzelnen Funktionen nicht an.

Es waren

$$B''(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{1}{2}x^{2n} + \frac{1}{2}\binom{2n}{1}B_1 x^{2n-1} - \frac{1}{4}\binom{2n}{3}B_2 x^{2n-3} + - \cdots\cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n}\binom{2n}{2n-1}B_n x. \quad (1)$$

$$B'(x) = \frac{x^{2n+2}}{2n+2} - \frac{1}{2}x^{2n+1} + \frac{1}{2}\binom{2n+1}{1}B_1 x^{2n} - \frac{1}{4}\binom{2n+1}{3}B_2 x^{2n-2} + - \cdots\cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n}\binom{2n+1}{2n-1}B_n x^2. \quad (2)$$

Die Reihen brechen ab mit dem Glied in x^2 oder x, je nachdem n eine ungerade oder eine gerade Zahl ist.

$$\varphi(x,n) = x^n - \frac{1}{2}n x^{n-1} + \binom{n}{2}B_1 x^{n-2} - \binom{n}{4}B_2 x^{n-4} + \binom{n}{6}B_3 x^{n-6} - + \cdots\cdots \quad (3)$$

Hier bricht die Reihe ab mit dem Gliede in x^2 oder x, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

$$\chi(n,x) = \frac{1}{n!}\left\{x^n - \frac{n}{2}x^{n-1} + \sum_{\lambda=1}(-1)^{\lambda-1}\binom{n}{2\lambda}B_\lambda x^{n-2\lambda}\right\} \quad (4)$$

Die Reihe bricht von selbst ab infolge von $\binom{n}{2\lambda}$.

$$B_n(x) = \frac{x^n}{n} - \frac{1}{2}x^{n-1} + \frac{n-1}{2!}B_1 x^{n-2} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}B_2 x^{n-4} + - \cdots\cdots \quad (5)$$

Die Reihe schliesst mit dem Gliede in x^2 oder x für ein gerades oder ungerades n.

$$A_n(x) = \frac{1}{n}\left\{x^n - \frac{1}{n} n x^{n-1} + \binom{n}{2} B_1 x^{n-2} - \binom{n}{4} B_2 x^{n-4} + \cdots\right\} \quad (6)$$

Der Exponent von x darf nie negativ werden.

Die einzelnen Definitionen können wir in zwei Gruppen teilen; die eine Gruppe enthält die Definition von Raabe, diejenige von Schlömilch und die erste von Glaisher, also die Funktionen $B(x)$, $\varphi(x, n)$ und $B_n(x)$. Es sind dies alles Funktionen, bei welchen kein von x freier Term vorkommen darf. Die zweite Gruppe enthält die Funktionen, welche einen selbständigen, von x freien Ausdruck aufweisen; es sind dies alle übrigen, also die Funktionen von Glaisher und von Schläfli, nämlich $A_n(x)$, $A'_n(x)$, $V_n(x)$, $U_n(x)$ und $\chi(n, x)$.

Sämtliche Funktionen stehen mit denjenigen der gleichen Gruppe in engem Zusammenhang; etwas komplizierter sind die Beziehungen der Definitionen der einen Gruppe zu denjenigen der andern Gruppe; wir erhalten folgende Beziehungen, welche den Zusammenhang der einzelnen Definitionen veranschaulichen:

I. Gruppe:

$$B''(x) = \frac{\varphi(x, 2m+1)}{2m+1}; \qquad B'(x) = \frac{\varphi(x, 2m+2)}{2m+2}. \quad (7)$$

$$B''(x) = B_{2m+1}(x); \qquad B'(x) = B_{2m+2}(x). \quad (8)$$

$$\varphi(x, n) = n B_n(x). \quad (9)$$

II. Gruppe:

$$\chi(n, x) = \frac{1}{(n-1)!} A_n(x); \qquad A_n(x) = (n-1)!\ \chi(n, x). \quad (10)$$

III. Gruppen gegenseitig:

$$B'(x) = (2n+1)!\ \chi(2n+2, x) + (-1)^{n+1} \frac{B_{n+1}}{2n+2}. \quad (11)$$

$$B''(x) = (2n)!\ \chi(2n+1, x). \quad (12)$$

$$B'(x) = A_{2n+2}(x) - A_{2n+2}(0); \qquad B''(x) = A_{2n+1}(x). \quad (13)$$

$$\varphi(x, 2n) = (2n)!\,\chi(2n, x) + (-1)^n B_n;$$

$$\varphi(x, 2n+1) = (2n+1)!\ \chi(2n+1, x). \quad (14)$$

$$\varphi(x, 2n) = 2n A_{2n}(x) + (-1)^n B_n; \quad \varphi(x, 2n+1) = (2n+1) A_{2n+1}(x). \quad (15)$$

Aus den obigen Beziehungen lassen sich die Werte für die übrigen Formeln durch einfache algebraische Umwandlung finden.

Gestützt auf die Tabellen I—IV (Seite 92—95), wo die Werte der für unsere Betrachtungen wichtigsten Definitionen für die einzelnen Argumente zusammengestellt sind, können wir obige Beziehungen auf ihre Richtigkeit prüfen.

§ 30. Vergleichung der einzelnen Definitionen.

A. Betreffs ihrer Herleitung.

Die Herleitungen der einzelnen Definitionen der Bernoullischen Funktion sind sehr verschieden. Überblicken wir alle, so erkennen wir bald, dass die einfachste und eleganteste Herleitung der Definitionsgleichung von Schläfli stammt, der ohne alle Umwege zu derselben gelangt. Zudem steht dieselbe mit der Fundamentalgleichung der Bernoullischen Zahlen in innigem Zusammenhang; dies bietet uns daher den Vorteil, dass wir aus *einer* Grundgleichung sowohl die Bernoullischen Funktionen, als auch die Bernoullischen Zahlen ohne grosse Schwierigkeit herleiten können; diese Gleichung nennen wir die *«Fundamentalgleichung der Bernoullischen Funktionen und der Bernoullischen Zahlen»*; dieselbe lautet

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{S_m\, y^{m+1}}{m!} = \frac{y\, e^{xy}}{e^y - 1} - \frac{y}{e^y - 1}; \qquad (16)$$

der erste Bruch rechts führt auf die Bernoullischen Funktionen, der zweite dagegen auf die Bernoullischen Zahlen.

Keine der übrigen Definitionen zeigt diesen Zusammenhang; bei all denselben braucht es grösserer Umwandlungen und längerer Rechnungen, bis wir auf die gewünschte Definitionsgleichung gelangen.[63])

B. Betreffs der Derivierten.

Stellen wir die *einfachen Ableitungen* der verschiedenen Definitionen zusammen, so ergibt sich, dass die Ableitungen der Funktionen nach Raabe und nach Schlömilch eine unerwünschte Komplikation durch den Hinzutritt einer Bernoullischen Zahl für die ungerade Bernoullische Funktion zeigen. Die Definition nach Glaisher weist zwar nur *eine* Formel auf; dagegen tritt vor die Ableitung noch ein Faktor, während bei der Schläflischen Definition die Derivierte einer Bernoullischen Funktion wieder eine reine Bernoullische Funktion ist; letztere Definition ist somit die bequemste.

Was die *mehrfachen Ableitungen* anbetrifft, so lassen sich diejenigen der Raabeschen Definition nicht darstellen, weil dort der

Exponent nur ungenügend angedeutet wird im Funktionssymbol. Ein Vergleich der übrigen zeigt, dass bei der Schlömilchschen Definition verschiedene Formeln nötig sind zur Darstellung der geraden oder ungeraden wiederholten Ableitungen der geraden oder ungeraden Bernoullischen Funktion. Bei Glaishers Definition fallen die unbequemen Bernoullischen Zahlen weg; ebenso ist zur Darstellung all der Ableitungen nur noch eine Formel nötig; doch zeigt dieselbe zwei vorgesetzte komplizierende Faktoren. Schläflis Definition ist auch hier die einfachste, da die wiederholten Ableitungen derselben stets reine Bernoullische Funktionen sind.[64])

C. In Bezug auf die Integraldarstellungen.

Das von den Derivierten Gesagte gilt ebenfalls von den *einfachsten Integralen,* da dieselben ja nur Umkehrungsfunktionen ersterer sind. Auch die *übrigen* Integraldarstellungen sprechen betreffs ihrer Einfachheit zu gunsten der Definition von Schläfli, da selbst die entsprechenden Formeln der Definition von Glaisher meist einen vorgesetzten Faktor mehr enthalten.[65])

D. In Bezug auf die Funktion mit inversem Argument.

Die Formeln dafür lauten bei allen Definitionen gleich; ihre Herleitungen sind aber sehr verschieden. Raabe geht zur Ableitung seiner obigen Formel ziemlich weit auf seine einleitenden Untersuchungen zurück; Glaisher stützt sich auf die Definitionssummenformeln des Sinus und Cosinus und stellt die beiden gefundenen Formeln zu einer allgemeinern zusammen. Sehr elegant und kurz sind die Herleitungen von Schlömilch und von Schläfli, wobei Schläfli mit Vorteil die Koeffizientenvergleichung verwendet.[66])

E. Betreffs der Funktion mit negativem Argument.

Es geben auch hierin alle Funktionen ziemlich ähnliche Werte, mit Ausnahme der symbolischen Darstellungsweise von Glaisher. Der Nenner im zweiten Term des Ausdruckes für die $\chi(n, -x)$-Funktion ist keine wesentliche Erschwerung, da die andern Definitionen, mit Ausnahme derjenigen von Raabe, auch einen vorgesetzten Faktor aufweisen.[67])

F. Betreffs andrer Formeln.

Wir haben bei den Definitionen von Raabe und Schlömilch mehr als bei den beiden andern näher betrachteten Funktionen die gerade und die ungerade Bernoullische Funktion trennen müssen; die Definitionen

von Glaisher und von Schläfli sind daher allgemeiner gehalten, und es ist das dem Umstande zuzuschreiben, dass die beiden ersten Definitionen kein von der Variabelen freies Glied enthalten dürfen; dies ist auch der Grund, dass bei den Differentialquotienten und Integraldarstellungen dieser Funktionen die lästigen Zusatzglieder mit den Bernoullischen Zahlen auftreten. Die Formeln, welche eine Summe von aufeinanderfolgenden Bernoullischen Funktionen darstellen, entscheiden wieder zu Gunsten der Funktionen von Glaisher und von Schläfli, da dieselben nur je *eine* Formel aufweisen, während die übrigen auch hierbei einen Unterschied zwischen geraden und ungeraden Bernoullischen Funktionen machen müssen. Die entsprechenden Formeln dieser Summe bei Glaisher und bei Schläfli sind ganz von gleicher Form; schon ihre Herleitung ist ziemlich ähnlich, da beide durch Koeffizientenvergleichung aus Entwicklungen nach Bernoullischen Funktionen zum Ziele gelangen. Glaisher zeigte im Laufe seiner Untersuchungen, also nicht etwa als Ausgangspunkt derselben, dass die $A_n(x)$-Funktionen sich geben lassen als

$$\left[\frac{a^n}{(n-1)!}\right] \text{ in } a\,\frac{e^{ax}}{e^a-1}.$$

Er kommt zu dieser Thatsache, wie wir gesehen, auf ziemlich umständliche Art und Weise, ausgehend von einer Formel, die selbst eine sehr komplizierte Herleitung aufweist; zudem ist seine Bernoullische Funktion kein reiner Koeffizient der Potenz von a, da stets im Nenner eine Fakultät sein muss. Schläfli aber geht direkt von dieser Entwicklung aus, indem er definiert

$$\chi(n,x) = n^{te} \text{ Bernoullische Funktion} = \left[y^n\right] \text{ in } y\,\frac{e^{xy}}{e^y-1}.$$

Diese Entwicklung bildet also seinen Ausgangspunkt, auf welchen sich alle Untersuchungen stützen; daher gestaltet sich seine Theorie der Bernoullischen Funktion viel einheitlicher und ist derjenigen von Glaisher überlegen.[66])

G. Betreffs Entwicklung in Reihen.

Alle Definitionen lassen sich leicht als trigonometrische Reihen darstellen und zwar die geraden Bernoullischen Funktionen als Cosinusreihen und die ungeraden als Sinusreihen.

Raabe und Glaisher gelangen durch fortgesetzte Differentiation der bekannten Reihe für $\pi\left\{\frac{1}{2}-x\right\}$[68]) woraus successive die ein-

zelnen Bernoullischen Funktionen entstehen, zu ihren diesbezüglichen Resultaten.

Elegant leitet Schlömilch, wie gesehen, seine Reihen her, gestützt auf die Fourierschen Reihen und Integrale. Genau auf dieselbe Weise würden wir auch bei den übrigen drei Definitionen zum Ziele gelangen; das Ziel würde zudem noch eher erreicht, da die aufgestellten Integralformeln das zu lösende Integral, welches die Koeffizienten der Fourierschen Entwicklung darstellt, mit geringer Mühe auswerten.[65])

Höchst interessant und wichtig ist die Herleitung dieser Formeln nach Schläfli, der gestützt auf die Theorie der Eulerschen Integrale und der Gammafunktion eine Reihenentwicklung so transformiert, bis er schliesslich zu den entsprechenden Beziehungen gelangt. Seine Resultate bieten den grossen Vorteil, dass sie nur Spezialwerte sind einer von ihm selbst aufgestellten Hauptformel

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{e^{i\left(2\lambda\pi\Theta-\frac{n\pi}{2}\right)}}{\lambda^n}$$

$$= (2\pi)^n \int_0^1 \left\{ \chi(n,\varphi) - \chi(n,\Theta) \right\} \frac{1}{2} \left[1 + i\,\mathrm{cotg}(\varphi - \Theta)\pi\right] d\varphi. \quad (17)$$

Durch Trennung der reellen von der imaginären Komponente erhält er die beiden ganz allgemeinen Formeln

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n} = -\frac{(2\pi)^n}{2}\chi(n,\Theta) \qquad \text{und} \qquad (18)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n}$$

$$= (2\pi)^n \int_0^1 \left\{ \chi(n,\varphi) - \chi(n,\Theta) \right\} \mathrm{cotg}\,\pi(\varphi-\Theta)\, d\varphi. \quad (19)$$

Aus Formel (18) resultieren dann die wichtigen trigonometrischen Summenformeln

$$\chi(2m, x) = (-1)^{m-1} \frac{2}{(2\pi)^{2m}} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos 2\lambda\pi x}{\lambda^{2m}} \qquad \text{und} \quad (20)$$

$$\chi(2m+1,x) = (-1)^{m-1} \frac{2}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin 2\lambda\pi x}{\lambda^{2m+1}}. \qquad (21)$$

Bei dieser Definition haben wir, wie sonst bei keiner andern, ursprünglich alle diese Reihenentwicklungen in derselben Formel vereinigt, was sehr zu Gunsten dieser Definition spricht.

Wir haben auch schon erwähnt, dass mit Hülfe dieser Funktion als Reihenentwicklung Schläfli die *Raabesche Restformel* herleitet und ebenso den Zusammenhang derselben mit der *Riemannschen Reihe* nachweist; es sind dies Beziehungen, welche die Allgemeinheit der Schläflischen Definition trefflich beleuchten.[69])

H. Betreffs Entwicklungen nach Bernoullischen Funktionen.

Entwicklungen, in welchen die Bernoullischen Funktionen als Koeffizienten auftreten, lassen sich aus jeder Definition herleiten; aber nur bei Schläfli sind die Bernoullischen Funktionen reine Koeffizienten solcher Entwicklungen; auch hier liefert diese Definition die einfachsten Formeln.[70])

§ 31. Diskussion der „Bernoullischen Funktion."

Unsere früher hergeleiteten Reihenentwicklungen der Bernoullischen Funktion haben gezeigt, dass dieselben nur gültig sind für $0 < x < 1$[71]); deshalb haben wir in unsern Untersuchungen hauptsächlich das Intervall $x = 0$ bis $x = 1$ berücksichtigt, wohl aber auch Gleichungen aufgestellt, um den Verlauf der Funktion ausserhalb dieses Intervalles kennen zu lernen.[72]) Gestützt auf diese Beziehungen hat sich uns die Frage aufgedrängt, wie weit sich das Konvergenzgebiet für die verschiedenen Definitionen überhaupt erstrecke. Um diese Frage zu entscheiden, stellen wir die Funktionen graphisch dar. Wir tragen die Werte für das Argument x (z) als Abscissen auf und die zugehörigen Funktionswerte y als Ordinaten; die einzelnen Werte sind in den Tabellen I—IV zusammengestellt; den Verlauf der verschiedenen Funktionen zeigen die Tabellen V—VIII.

1. Die Bernoullischen Funktionen ersten Grades. Dieselben stellen bei allen Definitionen eine Gerade dar; bei der Definition von Raabe, wie auch bei derjenigen von Schlömilch ist diese Gerade die Winkelhalbierende durch den ersten und dritten Quadranten, geht also durch den Ursprung; bei den Definitionen von Glaisher und Schläfli

schneidet sie die Abscissenaxe im Punkte $x = \frac{1}{2}$, aber ebenfalls unter einem Winkel von 45°.

2. Die Bernoullischen Funktionen zweiten Grades. Dieselben stellen eine gewöhnliche Parabel dar, und zwar ist die Parallele zur Ordinatenaxe durch den Punkt $x = \frac{1}{2}$ die Hauptaxe der Parabel mit dem Parameter $p = \frac{1}{4}$. Bei den Definitionen von Raabe und von Schlömilch schneidet diese Parabel die Abscissenaxe in den beiden Punkten $x = 0$ und $x = 1$, bei den andern Definitionen innerhalb dieses Intervalles. Dass dem so ist, beweist die Untersuchung einer einzelnen Funktion, da das Verfahren bei allen dasselbe ist; wir wählen dazu diejenige von Schläfli

$$\chi(2, x) = y = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}.$$

$$12\,y = 6x^2 - 6x + 1.$$

Transformieren wir diese Gleichung durch $x = x' + \frac{1}{2}$ und $y = y' - \frac{1}{24}$, so werden $y' = \frac{1}{2} x'^2$ und $p = \frac{1}{4}$; durch ähnliche Transformation der übrigen Definitionen gelangen wir stets auf dieselbe Gleichung.

3. Die Bernoullischen Funktionen höheren Grades. Alle diese Funktionen stellen *Parabeln höheren Grades* dar, da zu einem einzigen Werte von y stets mehrere Werte von x gehören; der Grad steigt mit dem Exponenten des ersten Gliedes. Im Intervall von 0 bis 1 weisen dieselben entweder ein Maximum oder ein Minimum oder beide zugleich auf, und es verlaufen die n^{te} und die $(n+4)^{te}$ Funktion entsprechend.

Es besitzen die Funktionen mit *geradem Exponenten* $n = 2, 6, 10, \ldots\ldots, (4\lambda - 2)$ ein *Minimum* bei $x = \frac{1}{2}$ und gehen auf beiden Seiten der Ordinatenaxe mit positiven Funktionswerten ins Unendliche, während die Funktionen für $n = 4, 8, 12, \ldots\ldots, 4\lambda$ ein *Maximum* bei $x = \frac{1}{2}$ aufweisen, beidseitig schwach negativ werden, um aber wieder mit beiden Ästen der Kurve mit positiven Funktionswerten ins Unendliche zu gehen.

Etwas abweichend davon verhalten sich die Kurven der Bernoullischen Funktionen mit *ungeraden Exponenten;* dieselben gehen sowohl mit positiven Funktionswerten auf positiver Seite der Ordinatenaxe ins Unendliche, als auch mit negativen auf negativer Seite. Alle diese Kurven ungeraden Grades schneiden die Abscissenaxe in den Punkten $0, \frac{1}{2}$ und 1, und es sind die Kurven für $n = 3, 7, 11, \ldots, (4\lambda - 1)$ im Intervall von $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2}$ *positiv* und von $x = \frac{1}{2}$ bis $x = 1$ *negativ;* von den Punkten $x = 0$ und $x = 1$ aus gehen sie absolut gleichwertig ins Unendliche. Für $n = 5, 9, 13, \ldots, (4\lambda + 1)$ nehmen die Funktionen zwischen $x = 0$ und $x = \frac{1}{2}$ *negative* Werte an, zwischen $x = \frac{1}{2}$ und $x = 1$ dagegen *positive;* in kurzer Entfernung ausserhalb dieses Intervalles finden sich nochmals zwei Schnittpunkte mit der Abscissenaxe, worauf auch diese Kurven absolut gleichwertig ins Unendliche laufen.

Es interessiert uns nun zu wissen, wie sich die Kurven im Unendlichen verhalten; denn dass dort die zwei Äste der einzelnen Funktionskurven zusammenhangen, ist bekannt, da ja die Parabeln unikursale oder rationale Kurven sind und sich alle Punkte derselben darstellen lassen durch algebraische Funktionen eines variabelen Parameters.

Wir greifen, da alle Funktionen höhern Grades der verschiedenen Definitionen analoge Form haben, diejenigen von Schläfli heraus und untersuchen vorerst

A. Die ungerade Bernoullische Funktion. Wir wählen dazu

$$z(5, x) = y = \frac{x^5}{120} - \frac{x^4}{48} + \frac{x^3}{72} - \frac{x}{720} \quad \text{oder}$$

$$6x^5 - 15x^4 + 10x^3 - x - 720y = 0.$$

Die Schnitte dieser Kurve mit der unendlich fernen Geraden erhalten wir, wenn wir die Gleichung mit z homogen machen durch die Formeln $x = \frac{x'}{z}$ und $y = \frac{y'}{z}$ und dann $z = 0$ setzen; diese Formeln vorerst eingesetzt, gibt, wenn zugleich mit z^5 multipliziert wird,

$$6x'^5 - 15x'^4z + 10x'^3z^2 - x'z^4 - 720y'z^4 = 0;$$

diese Gleichung wird für $z = 0$ zu $x'^5 = 0$, d. h.,

die Kurve schneidet die unendlich ferne Gerade in der Richtung der positiven Ordinatenaxe in fünf zusammenfallenden Punkten.

Zur nähern Untersuchung dieser zusammenfallenden Punkte im Unendlichen transformieren wir die unendlich ferne Gerade, welche wir parallel der Abscissenaxe annehmen können, ins Endliche, indem wir sie auf die Abscissenaxe projizieren; dazu dienen die Formeln

$$y = \frac{1}{y'} \text{ und } x = \frac{x'}{y'}; \text{ also } y' = \frac{1}{y} \text{ und } x' = \frac{x}{y}.$$

Für $y = \infty$ wird $y' = 0$, d. h.,

die unendlich ferne Gerade wird auf die Abscissenaxe projiziert und letztere ins Unendliche.

Durch die angedeutete Substitution entsteht, wenn mit y'^5 multipliziert wird,

$$6x'^5 - 15x'^4y' + 10x'^3y'^2 - x'y'^4 - 720\,y'^4 = 0. \qquad (\alpha)$$

Dies ist die Gleichung der transformierten Kurve; in dieser entspricht der Nullpunkt dem unendlich fernen Punkt der Ordinatenaxe der ursprünglichen Kurve.

Die Gleichung beginnt erst mit Gliedern vierten Grades; also ist der neue Nullpunkt O' ein vierfacher Punkt; die Tangenten in demselben erhalten wir durch Nullsetzen der Glieder niedrigsten Grades, also durch $y'^4 = 0$, was uns sagt, dass alle vier Tangenten des vierfachen Punktes mit der Abscissenaxe zusammenfallen. Für $y' = 0$ wird $x'^5 = 0$, d. h., die Abscissenaxe schneidet die Kurve im vierfachen Punkte O' in fünf zusammenfallenden Punkten.

Zur nähern Untersuchung der Kurve in der Nähe dieses vierfachen Punktes geben wir dem x' kleine Werte.

a) $x' = positiv = 0{,}01$. Die Gleichung (α) geht dann über in

$$6 \cdot 0{,}01^5 - 15 \cdot 0{,}01^4 y' + 10 \cdot 0{,}01^3 y'^2 - 0{,}01\,y'^4 - 720\,y'^4 = 0;$$

da y' selbst klein ist, so können wir infolge der vierten und fünften Potenz, in denen das kleine x' vorkommt, die beiden ersten Glieder vernachlässigen; dann folgt, wenn durch y'^2 dividiert wird,

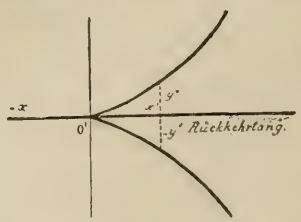
$$0{,}00001 = 720{,}01\,y'^2; \quad y' = \pm\sqrt{\frac{0{,}00001}{720{,}01}},$$

d. h., zu einem positiven kleinen x' gehören zwei reelle absolut gleichwertige, ein positives und ein negatives y'. Geben wir dem x' grössere positive Werte, so steigt der absolute Wert der y' ziemlich rasch.

b) $x' = negativ = -0{,}01$. Für diesen Wert wird aus (α) unter Vernachlässigung der beiden ersten Glieder und durch Division durch y'^2

$$719{,}99\,y'^2 = -0{,}00001;\quad y' = \pm\sqrt{-\frac{0{,}00001}{719{,}99}} = \text{imaginär.}$$

Dies ergibt sich auch aus andern negativen Werten für x′, somit folgt, dass auf der negativen Seite der Ordinatenaxe keine Kurvenpunkte liegen. Der neue Nullpunkt erscheint daher als ein vierfacher Punkt von der Art, dass die Kurve in ihm eine Spitze bildet, und die Abscissenaxe ist Rückkehrtangente in demselben mit fünffachem Berührungspunkt. Dasselbe gilt für den unendlich fernen Punkt der Ordinatenaxe der ursprünglichen Kurve; derselbe ist ein vierfacher Punkt der Parabel, in welchem alle vier Tangenten mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen; wir können den Punkt als *Rückkehrpunkt zweiter Ordnung* bezeichnen.



Da wir diese Ausführungen auch auf die Bernoullischen Funktionen höhern Grades ausdehnen können, bei welchen die vielfachen Punkte nur in höherem Grade der Vielfachheit auftreten, so ergibt sich der *Satz:*

Die ungeraden Bernoullischen Funktionen höhern, $(2m+1)^{ten}$ Grades, analytisch interpretiert, stellen Parabeln höhern Grades dar; bei denselben ist der unendlich ferne Punkt in der Richtung der positiven Ordinatenaxe ein $2m$-facher Punkt, in welchem alle $2m$ Tangenten mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen. Die Kurve bildet in ihm eine Spitze und die unendlich ferne Gerade ist Rückkehrtangente mit $(2m+1)$-fachem Berührungspunkt; der Punkt ist ein Rückkehrspunkt von der Ordnung m.

B. Die gerade Bernoullische Funktion. Etwas anders gestaltet sich der Verlauf dieser Funktion im Unendlichen. Zur Untersuchung wählen wir

$$\chi(4, x) = y = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} - \frac{1}{720} \qquad \text{oder}$$

$$30\,x^4 - 60\,x^3 + 30\,x^2 - 720\,y - 1 = 0.$$

Die Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden werden gestützt auf die homogene Gleichung

$$30\,x'^4 - 60\,x'^3 z + 30\,x'^2 z^2 - 720\,y' z^3 - z^4 = 0,$$

für $z = 0$ $\quad x'^4 = 0$, d. h.,

die unendlich ferne Gerade wird von der Kurve in vier zusammenfallenden Punkten geschnitten in der Richtung der positiven Ordinatenaxe.

Projizieren wir die unendlich ferne Gerade wieder durch die

frühere Substitution auf die Abscissenaxe ins Endliche, so folgt, wenn mit y'^4 multipliziert wird,

$$30x'^4 - 60x'^3y' + 30x'^2y'^2 - y'^4 - 720y'^3 = 0. \qquad (\beta)$$

Dies ist die Gleichung der transformierten Kurve; da sie erst mit Gliedern dritten Grades beginnt, so ist der neue Nullpunkt O′ ein dreifacher Punkt; die Tangenten in demselben erhalten wir aus $y'^3 = 0$, d. h., alle drei Tangenten fallen in der Abscissenaxe zusammen, und diese berührt die Kurve in vier zusammenfallenden Punkten; also ist auch der unendlich ferne Punkt der Ordinatenaxe ein dreifacher Punkt der Kurve, dessen drei Tangenten mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen.

Zur noch genauern Untersuchung dieser Kurve in der Nähe des dreifachen Punktes transformieren wir die Gleichung (β) wie folgt:

$$30x'^2(x'-y')^2 = y'^3(y'+720).$$

$$x'(x'-y') = \pm\sqrt{\frac{y'^3(y'+720)}{30}}.$$

$$x'^2 - x'y' \mp \sqrt{\frac{y'^3(y'+720)}{30}} = 0.$$

$$x' = \frac{1}{2}\left\{ y' \pm \sqrt{y'^2 \pm 4\sqrt{\frac{y'^3(y'+720)}{30}}} \right\}$$

Die Quadratwurzel wird nur für $y' = 0$ selbst zu Null.

Geben wir jetzt dem y′ kleine Werte, so wird für

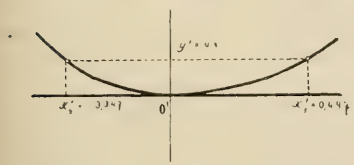
a) $y' = positiv = 0,1.$

$$x' = \frac{1}{2}\left\{ 0,1 \pm \sqrt{0,01 + 4\sqrt{\frac{0,001 \,.\, 720,1}{30}}} \right\} = \frac{1}{2}\left\{ 0,1 \pm 0,794 \right\}.$$

$$x_1' = 0,447; \qquad x_2' = -0,347.$$

Ebenso würde ein grösseres y′ zwei verschiedene reelle Werte liefern. Somit gehören zu einem positiven y′ zwei verschiedene reelle Werte von x′, wovon stets der eine *positiv*, der andere *negativ* ist.

b) $y' = negativ\ und\ klein.$ In diesem Falle wird die Quadratwurzel stets imaginär und somit auch der Wert für x′; daraus folgt, dass die Kurve ganz oberhalb der Abscissenaxe liegt und von der Ordinatenaxe nicht symmetrisch geteilt wird. Der dreifache Punkt unterscheidet sich also nicht wesentlich von einem gewöhnlichen Kurvenpunkt, nur ist die Krümmung der Kurve in der Nähe desselben eine schwächere.



Da diese Untersuchungen auch ausgedehnt werden können auf die geraden Bernoullischen Funktionen mit höhern Exponenten, so ergibt sich der *Satz:*

Die geraden Bernoullischen Funktionen höhern, $2m^{ten}$ Grades stellen ebenfalls Parabeln höhern, $2m^{ten}$ Grades dar; bei denselben ist der unendlich ferne Punkt in der Richtung der Ordinatenaxe ein $(2m-1)$-facher Punkt, in welchem alle $(2m-1)$ Tangenten mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen, welche die Kurve in $2m$ zusammenfallenden Punkten berührt. Die Kurve liegt ganz auf der einen Seite der unendlich fernen Geraden, und der $(2m-1)$-fache Punkt unterscheidet sich nicht wesentlich von einem gewöhnlichen Kurvenpunkt, nur ist die Krümmung in der Nähe desselben eine schwächere.

Da diese Untersuchungen für alle Definitionen analog durchgeführt werden können und auch entsprechende Resultate liefern, so sind wir über den Verlauf aller Bernoullischen Funktionen im Endlichen wie im Unendlichen genügend aufgeklärt.

Die Tabellen V—VIII zeigen nun deutlich, dass das Gültigkeitsgebiet der einzelnen Definitionen ein ziemlich verschieden grosses ist; am kleinsten ist das Konvergenzgebiet der Schlömilchschen Definition; das beste Gebiet liegt hier zwischen -1 und $+2$; ausserhalb desselben nimmt die Funktion sehr rasch grosse Werte an. Etwas, aber nur wenig grösser ist das Konvergenzgebiet der Definitionen von Raabe und von Glaisher, was aus den Tabellen V und VIII ersichtlich ist. Die Parabeln der Definition von Schläfli sind diejenigen, welche sich der Abscissenaxe am weitesten, sowohl nach der positiven wie nach der negativen Seite hin anschmiegen und zwar um so mehr, je grösser der Grad der Funktion ist; so erstreckt sich das beste Gebiet für $n = 6$ schon zwischen -3 und $+4$; bei den noch höhern Bernoullischen Funktionen wird dieses Gebiet bedeutend vergrössert.

Es ist dies ein weiterer Vorzug der Definition von Schläfli, wieder bewirkt durch die Fakultät im Nenner.

§ 32. Entscheidung.

Gestützt auf all unsere frühern Betrachtungen, gelangen wir zu folgendem Resultat:

Die Definition der Bernoullischen Funktion nach L. Schläfli ist die für die Theorie zutreffendste, weil

1. *ihr Konvergenzgebiet sich am weitesten ausdehnt,*
2. *alle Formeln einfachere Gestalt annehmen,*
3. *dieselbe die allgemeinste ist und*
4. *die ganze Theorie sich einheitlicher aufbaut, infolge der trefflich gewählten Grundbeziehung zwischen den Bernoullischen Zahlen und Funktionen und der Anwendung des Prinzipes der Koeffizientenvergleichung.*

Tabelle I.

Definition nach J. Raabe: $B^n(x)$.

Arg.	n = 0.	n = 1.	n = 2.	n = 3.	n = 4.	n = 5.
x = — 4.	— 4,000000	10,000000	— 30,000000	100,000000	—354,000000	1300,000000
x = — 3.	— 3,000000	6,000000	— 14,000000	36,000000	— 98,000000	276,000000
x = — 2.	— 2,000000	3,000000	— 5,000000	9,000000	— 17,000000	33,000000
x = — 1.	— 1,000000	1,000000	— 1,000000	1,000000	— 1,000000	1,000000
x = — 3/4.	— 0,750000	0,656250	— 0,546875	0,430664	— 0,321289	0,233276
x = — 1/2.	— 0,500000	0,375000	— 0,250000	0,140625	— 0,062500	0,023438
x = — 1/4.	— 0,250000	0,156250	— 0,078125	0,024414	0,000977	— 0,003052
x = 0.	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
x = 1/4.	0,250000	— 0,093750	0,015625	0,008789	— 0,004883	— 0,004028
x = 1/2.	0,500000	— 0,125000	0,000000	0,015625	0,000000	— 0,007813
x = 3/4.	0,750000	— 0,093750	— 0,015625	0,008789	0,004883	— 0,004028
x = 1.	1,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
x = 5/4.	1,250000	0,156250	0,078125	0,024414	— 0,000977	— 0,003052
x = 3/2.	1,500000	0,375000	0,250000	0,140625	0,062500	0,023438
x = 7/4.	1,750000	0,656250	0,546875	0,430664	0,321289	0,233276
x = 2.	2,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
x = 3.	3,000000	3,000000	5,000000	9,000000	17,000000	33,000000
x = 4.	4,000000	6,000000	14,000000	36,000000	98,000000	276,000000
x = 5.	5,000000	10,000000	30,000000	100,000000	354,000000	1300,000000

Definition nach O. Schlömilch: $\phi(z, n)$.

Arg.	n = 1.	n = 2.	n = 3.	n = 4.	n = 5.	n = 6.
z = − 4.	− 4,000000	20,000000	− 90,000000	400,000000	− 1770,000000	7800,000000
z = − 3.	− 3,000000	12,000000	− 42,000000	144,000000	− 490,000000	1656,000000
z = − 2.	− 2,000000	6,000000	− 15,000000	36,000000	− 85,000000	198,000000
z = − 1.	− 1,000000	2,000000	− 3,000000	4,000000	− 5,000000	6,000000
z = − 3/4.	− 0,750000	1,312500	− 1,640625	1,722656	− 1,606445	1,399658
z = − 1/2.	− 0,500000	0,750000	− 0,750000	0,562500	− 0,312500	0,140625
z = − 1/4.	− 0,250000	0,312500	− 0,234375	0,097656	0,004883	− 0,018311
z = 0.	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
z = 1/4.	0,250000	− 0,187500	0,046875	0,035156	− 0,024414	− 0,024170
z = 1/2.	0,500000	− 0,250000	0,000000	0.062500	0,000000	− 0,046875
z = 3/4.	0,750000	− 0,187500	− 0,046875	0,035156	0,024414	− 0,024170
z = 1.	1,000000	0,000000	0.000000	0.000000	0,000000	0,000000
z = 5/4.	1,250000	0,312500	0,234375	0,097656	− 0,004883	− 0,018311
z = 3/2.	1,500000	0,750000	0,750000	0,562500	0,312500	0,140625
z = 7/4.	1,750000	1,312500	1.640625	1,722656	1,606445	1,399658
z = 2.	2,000000	2,000000	3,000000	4.000000	5,000000	6,000000
z = 3.	3,000000	6,000000	15,000000	36,000000	85,000000	198,000000
z = 4.	4,000000	12,000000	42.000000	144,000000	490,000000	1656,000000
z = 5.	5,000000	20,000000	90.000000	400,000000	1770,000000	7800,000000

Tabelle III.

Definition nach L. Schläfli: $\chi(n, x)$.

Arg.	n = 1.	n = 2.	n = 3.	n = 4.	n = 5.	n = 6.
$x = -4$.	−4,500000	10,083333	−15,000000	16,665278	−14,750000	10,833366
$x = -3$.	−3,500000	6,083333	− 7,000000	5,998611	− 4,083333	2,300033
$x = -2$.	−2,500000	3,083333	− 2,500000	1,503472	− 0,708333	0,275033
$x = -1$.	−1,500000	1,083333	− 0,500000	0,165278	− 0,041667	0,008366
$x = -3/4$.	−1,250000	0,739583	− 0,273438	0,070388	− 0,013387	0,001977
$x = -1/2$.	−1,000000	0,458333	− 0,125000	0,022049	− 0,002604	0,000228
$x = -1/4$.	− 0,750000	0,239583	− 0,039063	0,002680	0,000041	0,000008
$x = 0$.	− 0,500000	0,083333	0,000000	−0,001389	0,000000	0,000033
$x = 1/4$.	− 0,250000	−0,010416	0,007813	0,000076	− 0,000203	−0,000001
$x = 1/2$.	0,000000	−0,041667	0,000000	0,001,215	0,000000	−0,000033
$x = 3/4$.	0,250000	−0,010417	− 0,007813	0,000076	0,000203	−0,000001
$x = 1$.	0,500000	0,083333	0,000000	−0,001389	0,000000	0,000033
$x = 5/4$.	0,750000	0,239583	0,039063	0,002680	− 0,000041	0,000008
$x = 3/2$.	1,000000	0,458333	0,125000	0,022049	0,002604	0,000228
$x = 7/4$.	1,250000	0,739583	0,273438	0,070388	0,013387	0,001977
$x = 2$.	1,500000	1,083333	0,500000	0,165278	0,041667	0,008366
$x = 3$.	2,500000	3,083333	2,500000	1,503472	0,708333	0,275033
$x = 4$.	3,500000	6,083333	7,000000	5,998611	4,083333	2,300033
$x = 5$.	4,500000	10,083333	15,000000	16,665278	14,750000	10,833366

Tabelle V.

Definition nach J. Raabe.

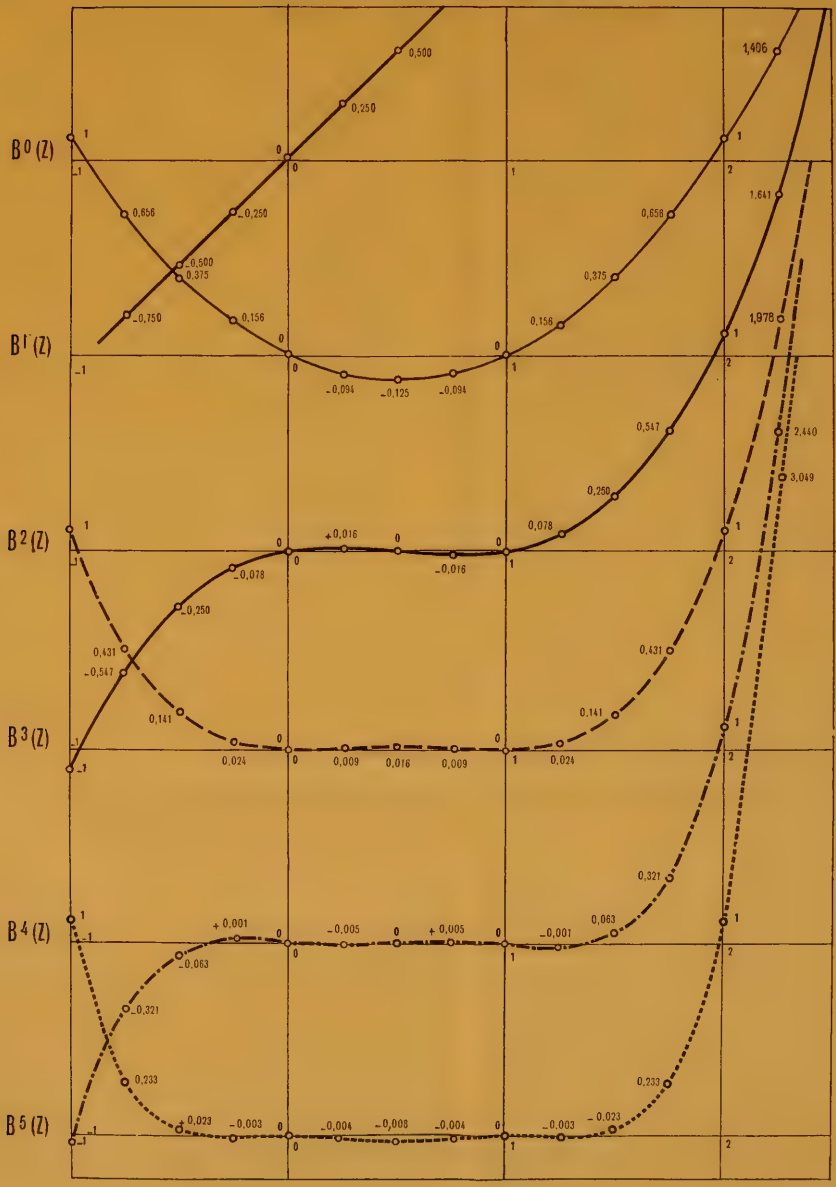


Tabelle VI.

Definition nach Schlömilch.

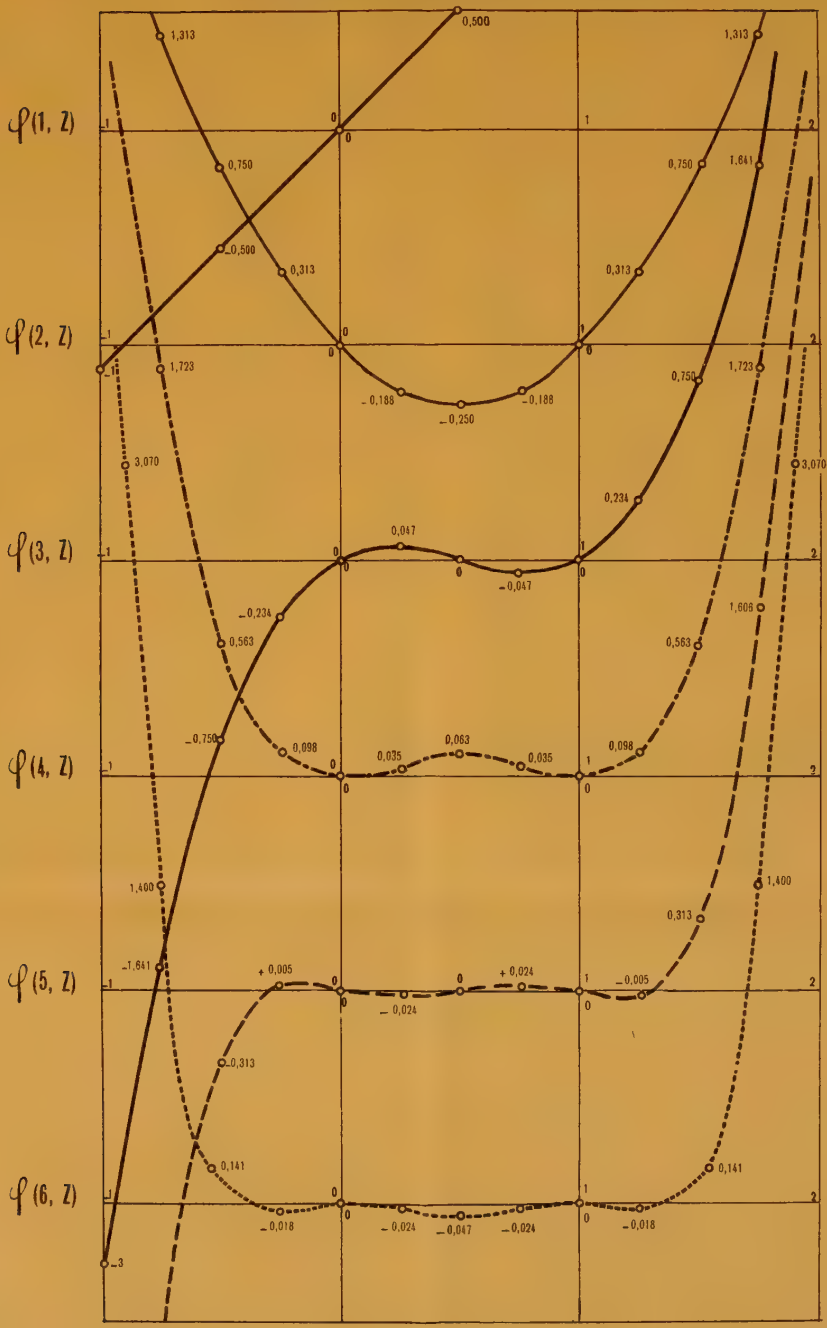


Tabelle VII.

Definition nach L. Schläfli.

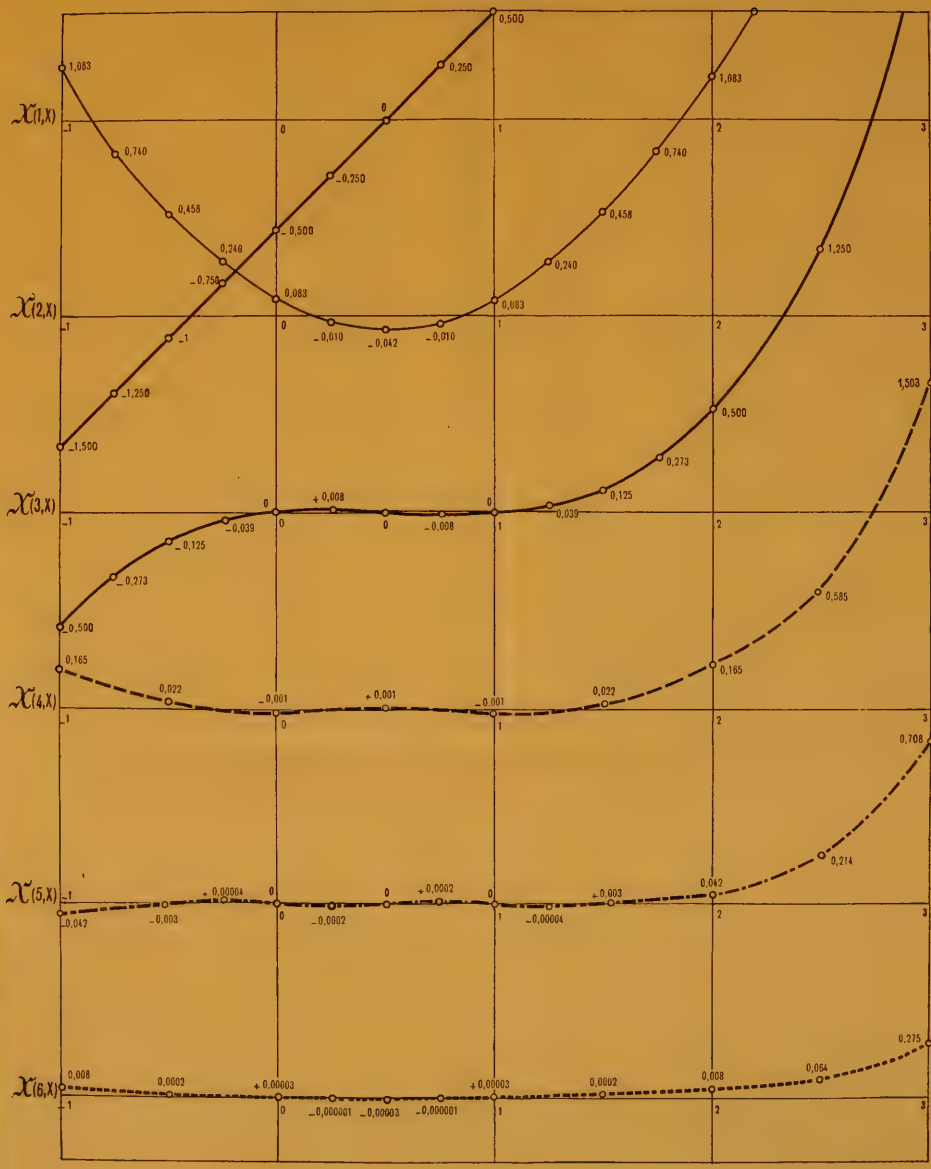
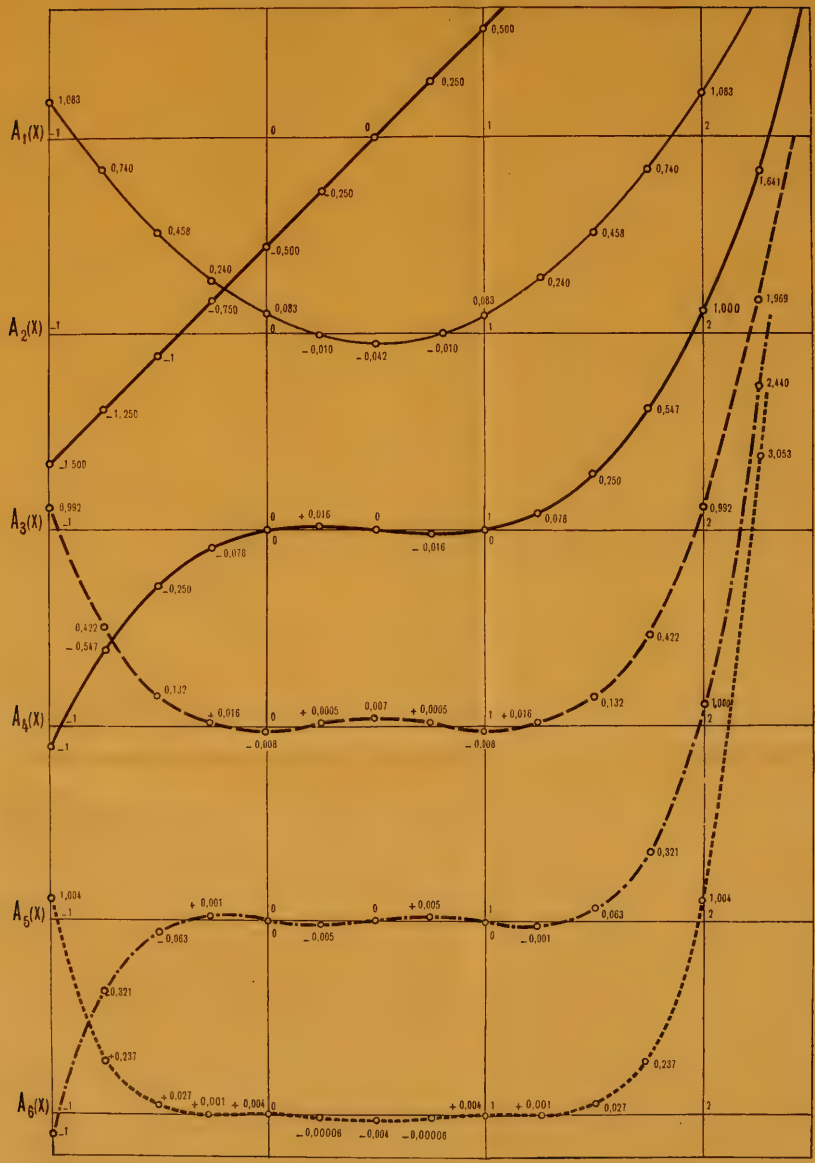


Tabelle VIII.

Definition nach W. Glaisher.



Definition nach J. W. L. Glaisher: $A_n(x)$.

Arg.	n = 1.	n = 2.	n = 3.	n = 4.	n = 5.	n = 6.
x = − 4.	−4,500000	10,083333	−30,000000	99,991667	−354,000000	1300,003968
x = − 3.	−3,500000	6,083333	−14,000000	35,991667	− 98,000000	276,003968
x = − 2.	−2,500000	3,083333	− 5,000000	9,020833	− 17,000000	33,003968
x = − 1.	−1,500000	1,083333	− 1,000000	0,991667	− 1,000000	1,003968
x = − 3/4.	−1,250000	0,739583	− 0,546875	0,422331	− 0,321289	0,237245
x = − 1/2.	−1,000000	0,458333	− 0,250000	0,132292	− 0,062500	0,027406
x = − 1/4.	− 0,750000	0,239583	− 0,078125	0,016081	0,000977	0,000916
x = 0.	−0,500000	0,083333	0,000000	− 0,008333	0,000000	0,003968
x = 1/4.	−0,250000	−0,010416	0,015625	0,000456	− 0,004833	− 0,000060
x = 1/2.	0,000000	−0,041666	0,000000	0,007292	0,000000	− 0,003968
x = 3/4.	0,250000	−0,010416	− 0,015625	0,000456	0,004833	− 0,000060
x = 1.	0,500000	0,083333	0,000000	− 0,008333	0,000000	0,003968
x = 5/4.	0,750000	0,239583	0,078125	0,016081	− 0,000977	0,000916
x = 3/2.	1,000000	0,458333	0,250000	0,132292	0,062500	0,027406
x = 7/4.	1,250000	0,739583	0,546875	0,422331	0,321289	0,237245
x = 2.	1,500000	1,083333	1,000000	0,991667	1,000000	1,003968
x = 3.	2,500000	3,083333	5,000000	9,020833	17,000000	33,003968
x = 4.	3,500000	6,083333	14,000000	35,991667	98,000000	276,003968
x = 5.	4,500000	10,083333	30,000000	99,991667	354,000000	1300,003968

Anmerkungen.

☞ Während der Drucklegung vorliegender Arbeit erschien in den «Mitteilungen» der naturforschenden Gesellschaft in Bern 1900, von J. H. Graf herausgegeben, und mit Noten versehen, ein Brief L. Schläflis an einen Freund, betitelt «*Praktische Integration.*» Derselbe wurde veranlasst durch Fragen des Freundes über die Richtigkeit verschiedener Resultate von J. L. Raabes Differential- und Integralrechnung, Band I, 1839. In dieser Abhandlung gibt Schläfli Beziehungen, die sehr grosse Ähnlichkeit zeigen mit seinen später aufgestellten Relationen der Bernoullischen Funktionen. Stammt dieser Brief wirklich aus dem Jahre 1840, was nach den vorliegenden Untersuchungen von J. H. Graf als bewiesen anzunehmen ist, *so ist Schläfli, zwar ohne den Namen der Funktion zu nennen, schon vor J. Raabe auf diese Funktion gekommen.* Es ist dies ein weiterer Beweis für Schläflis schöpferische Thätigkeit.

Folgende wenige Thatsachen sollen einige Ähnlichkeiten hervorheben:

a) Die auf Seite 7 (89) der «Mitteilungen» der naturforschenden Gesellschaft in Bern 1900 gegebenen Koeffizienten c_1, c_2, c_3, ... stimmen genau überein mit denjenigen bei der Herleitung der Definition der Bernoullischen Zahlen.

b) Die von Schläfli in der angeführten Arbeit, Seite 10 (92) angewandte Formel für c_{2n} ist nicht identisch mit der *später* von ihm gebrauchten. Daher werden die B-Werte nicht gleich den eigentlichen Bernoullischen Zahlen. (Vergleiche Tabelle auf Seite 10 (92) dieses Briefes.) Trotzdem tritt eine unverkennbare Ähnlichkeit der Beziehungen hier und später bei der Bernoullischen Funktion ein; vergleiche in diesem bereits erwähnten Briefe

1. Formel (e), Seite 11 (93) und B″(z) von Raabe,
2. » zwischen (e) u. (f), » 11 (93) » B′ (z) » »
3. » (f), » 11 (93) » ′B (z) » » ,

welche bis auf die jedem Gliede vorgesetzten Nenner übereinstimmen.

c) Formel (l) ist analog gebaut wie unsere Formel (III) (25); nur zeigt sie eine Fakultät im Nenner; letztere hat Schläfli später durch zweckmässige Wahl der Definitionsgleichung wegzuschaffen gewusst. Formel (m) gleicht unserer Formel III (23), zeigt aber eine unliebsame Zuthat durch ein Summenglied.

d) Formel (y) entspricht unserer Formel III (24); sie liefert auch dieselben Werte, trotzdem darin die B-Zahlen andere Werte haben.

e) Auch die unterste Formel auf Seite 13 (95) dieses Schläflischen Briefes, welche Beziehungen seiner φ-Funktionen für die Argumente $0, \frac{1}{2}$ und 1 gibt, entspricht ganz unserer spätern Formel III (10).

Natürlich sind durch diese wenigen Aufzählungen die Analogien beider noch lange nicht erschöpft.

[1]) Vergleiche das Verzeichnis der benutzten Litteratur am Schlusse der Arbeit.

[2]) Siehe *Saalschütz* «Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, ihren Zusammenhang mit den Sekantenkoeffizienten und ihre wichtigsten Anwendungen,» wo sich auf den Seiten 204—207 ein grösseres Litteraturverzeichnis befindet.

[3]) Zum Studium sehr zu empfehlen ist die schon in Anmerkung 2 angeführte Arbeit von L. Saalschütz. Siehe Litteraturverzeichnis!

[4]) *Jakob Bernoulli* (1654—1705) gab in seinem epochemachenden Werke über die Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ars conjectandi, Mutmassungskunst als Erweiterung der gemeinen ars computandi oder Rechnungskunst, nicht nur eine beinahe vollständige Theorie der Kombinatorik und der figurierten Zahlen, sondern fand auch die nach ihm benannten Zahlen, die bekanntlich in der Reihen- und Interpolationsrechnung von Wichtigkeit sind, und auf welche sich die Theorie der Bernoullischen Funktion stützt.

[5]) Siehe Journal für reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von A. L. Crelle, Band 42, Seite 348—376.

[6]) Quarterly Journal of pure and applied Mathematics, Vol. XXIX, pag. 1.

[7]) Messenger of Mathematics, Vol. XXVI, No. 10—12 und Vol. XXVII, No. 2—8.

[8]) Vergleiche J. Raabe «Die Jakob Bernoullische Funktion», Seite 1—16.

[9]) Seite 13 der eingangs erwähnten Schrift: J. Raabe «die Jakob Bernoullische Funktion.»

[10]) Vergleiche Raabes zweite diesbezügliche Arbeit. Journal von Crelle. Band 42.

[11]) Es sind dies die beiden schon früher gefundenen Formeln (17^b).

[12]) Seite 97 u. ff. und Saalschütz «Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen». Anmerkung 1, Seite 7 und 8.

[13]) Vergleiche Wallis «Opera mathematica.» Oxon. 1695 und «Arithmetica infinitorum.»

[14]) Siehe A. G. Kästner «Geschichte der Mathematik,» Band 3, Seite 111 u. ff.

[15]) Vergleiche «Ars conjectandi.» Basilea 1713. Seite 97 u. ff.

[16]) Ist Formel 18^a, nur identisch anders geschrieben.

[17]) Vergleiche Raabes erste Arbeit über diesen Gegenstand, Seite 17—23.

[18]) Wo $B_1'(z) = \frac{d}{dz} B'(z)$.

[19]) Raabe spricht sich im Vorwort seiner ersten auf die Bernoullische Funktion bezüglichen Schrift folgendermassen darüber aus: «Die Eigenschaften dieser Funktion B(z) sind Analogien zu denen der Legendreschen Funktion $\Gamma(z)$, die das Eulersche Integral zweiter Art vorstellt. Beinahe alle Eigentümlichkeiten die bei dieser $\Gamma(z)$ durch Produkte angedeutet sind, sprechen sich bei jener B(z) durch Summen aus: so dass gestützt auf eine in der niedern Algebra übliche Terminologie, wo von einer arithmetischen und geometrischen Progression die Rede ist, auch die hier einzuführende Funktion B(z) eine arithmetische, und

das Eulersche Integral $\Gamma(z)$ eine geometrische Funktion von z genannt werden dürfte».

[20]) Siehe auch Tabelle V am Schlusse dieser Arbeit.

[21]) Raabe gibt diese vier Formeln, ohne auf ihre Herleitung näher einzutreten, in seiner zweiten, diesen Gegenstand behandelnden Schrift in Crelles Journal, Band 42, Seite 352.

[22]) Zum genauern Studium verweisen wir wieder auf Raabes Arbeit im 42. Band von Crelles Journal, Seiten 359—362.

[23]) Hierin bedeutet wie gebräuchlich $D^p = \frac{d^p}{dx^p}$.

[24]) Siehe Compendium der höhern Analysis von O. Schlömilch, Teil I Seite 277 und Teil II, Seite 208.

[25]) Siehe auch §§ 29 und 30 vorliegender Arbeit.

[26]) Vergleiche J. Worpitzky «Studien über die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen». Journal von Crelle, Band 94, Seite 203 u. ff.

[27]) Vergleiche § 31 vorliegender Arbeit, sowie Tabelle VI.

[28]) Über die Ausmittlung von $\int_0^1 e^{xz} \cos k\pi z \, dz$, die ziemlich umständlich bewerkstelligt wird, siehe Schlömilch «Comp. der Analysis», Band I, Seite 361, § 78. II.

[29]) Siehe Journal von Crelle, Band 94, Seite 220. Formeln 52.

[30]) Vergleiche Zeitschrift für Mathematik und Physik. Band I, Seite 202 und Comp. der Analysis von O. Schlömilch, Band II, Seite 218 u. ff.

[31]) Wir bezeichnen in Zukunft Koeffizient stets durch $[\ldots]$, z. B., $[y^n]$ = Koeffizient von y^n.

[32]) Vergleiche § 31 und Tabellen V—VIII.

[33]) Siehe § 16, Formel (12).

[34]) Vergleiche auch Tabelle VII am Schlusse dieser Arbeit.

[35]) Vergleiche § 12.

[36]) Siehe § 20, Formeln (40) und (41).

[37]) Vergleiche Dr. J. H. Graf: «Einleitung in die Theorie der Gammafunktion und der Eulerschen Integrale», Seite 30, Formel (36), wie auch bei andern Autoren.

[38]) Nach Definitionsgleichung (2).

[39]) Vergleiche auch § 20, Formeln (29), (31) und (33).

[40]) Wir verweisen auf die darüber bekannten Arbeiten: «Über Bernoullische Zahlen und Funktionen», Vorlesungen an der Berner Hochschule von Dr. J. H. Graf. S. S. 1898 und «Über eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Funktionen und ihren Zusammenhang mit der verallgemeinerten Riemannschen Reihe» von Dr. Alfred Jonquière. Stockholm 1891. Bihang till K. Svenska Vet.-Acad. Handlingar. Band 16. Afd. I. No. 6.

[41]) Siehe Dr. J. H. Graf «Einleitung in die Theorie der Gammafunktion», Seite 49, 3. Zeile, wie auch bei andern Autoren.

[42]) Siehe «Quarterly Journal of pure and applied mathematics». Vol. XXVIII, pag. 1—174.

[43]) Siehe gleiche Zeitschrift, Vol. XXIX, pag. 1—168.

[44]) Vergleiche «Messenger of mathematics», Vol. XXVI, pag. 152—182 und Vol. XXVII, pag. 20—98.

[45]) Vergleiche darüber «Quarterly Journal», Vol. XXVII, pag. 4—18.

[46]) Über ihren Zusammenhang siehe § 29, Formel (10).

[47]) Siehe § 23, Formeln (12), (13) und (16).

[48]) Vergleiche «Quarterly Journal». Band XXVIIII, § 18, pag. 11.

[49]) Siehe § 26, Formeln (23) und (24).

[50]) Siehe Schlömilch «Compendium der Analysis». Seite 140, Formel 27, und Seite 141, Formel 32. Diese gehen durch Substitution von $\lambda = a$ und $x = \pi(1-2x)$ in unsere Formeln über.

[51]) Vergleiche den mehrfach erwähnten Band des «Quarterly Journal», pag. 7—18, wie auch an andern Stellen.

[52]) Ebendort, pag. 26—83.

[53]) Siehe § 28.

[54]) «Quarterly Journal», Band XXIX, §§ 58, 75, 85, 88, 109, 115, 119, 123, 132, 134, 143 und 146.

[55]) Vergleiche «Quarterly Journal», Band XXIX, § 18.

[56]) Vergleiche Tabellen IV und VIII.

[57]) Siehe Formeln (23) und (24) von § 26.

[58]) Vergleiche «Quarterly Journal», §§ 47, 58 und 75 und «Messenger of mathematics», § 73.

[59]) Siehe «Messenger of mathematics», Bände XXVI und XXVII.

[60]) Siehe «Quarterly Journal», §§ 174—216.

[61]) Vergleiche «Quarterly Journal», §§ 217—311.

[62]) Siehe «Messenger of mathematics», §§ 99—102 und § 108.

[63]) Vergleiche vorliegende Arbeit, §§ 1, 7, 14 und 21.

[64]) Siehe diese Arbeit §§ 2, 8, 15 und 22.

[65]) Vergleiche vorliegende Arbeit, §§ 6, 13, 20 und 27.

[66]) Siehe diese Arbeit, §§ 3, 9, 16 und 23.

[67]) Vergleiche unsere §§ 3, 10, 17 und 24.

[68]) Siehe Schlömilch «Comp. der Analysis», Band II, Seite 129, wo für $\beta = \pi x$ und $x < 1$ diese Reihe erhältlich ist.

[69]) Vergleiche Anmerkung [40]).

[70]) Siehe auch Rogel «Die Entwicklung nach Bernoullischen Funktionen» in den Sitzungsberichten der königlich-böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Prag 1896.

[71]) Vergleiche unsere §§ 5, 12, 19 und 26.

[72]) Siehe § 3, Formel 18, § 10, Formel 16 und § 17, Formel 19.

[73]) Vergleiche Tabelle VII.

Dr. v. Fellenberg, Dr. Kissling, Dr. Schardt.
(Eingereicht im Februar 1900.)

Lötschberg- und Wildstrubeltunnel.

Geologische Expertise.

An die Baudirektion des Kantons Bern.

Geehrter Herr Regierungsrat!

Ende August haben Sie den unterzeichneten Experten folgende Aufgaben gestellt:

«1. Begutachtung derjenigen geologischen Verhältnisse des zu durchfahrenden Gebirges, welche für den Arbeits- und Zeitaufwand beim Tunnelbau und für den späteren Unterhalt beim Betriebe wichtig sind, wie: Die Art der zu durchbohrenden Gesteine, ihre Lagerung und die mutmassliche Ausdehnung ihres Vorkommens; ihre Härte und Zähigkeit, Standfestigkeit und Verwitterbarkeit, der Gebirgsdruck und der Wasserzudrang etc.

Die Ergebnisse der geologischen Aufnahmen werden in die Karte 1: 50,000 eingetragen und für jede der beiden vorgeschlagenen Varianten des Lötschbergtunnels in einem geologischen Profil im Massstab 1: 25,000 dargestellt und mit Probestücken (Handstücken) der vorkommenden Gesteinsarten belegt.

Die erforderlichen Karten und Terrainprofile werden den Experten von der Baudirektion zur Verfügung gestellt.

2. Geologische Begutachtung einer allfälligen Verschiebung der noch nicht endgültig bestimmten Tunnelaxe innerhalb eines Streifens von 1/2—1 Kilometer Breite rechts und links von der vorläufig angenommenen Axe.

3. Begutachtung der in der geologischen Beschaffenheit des Gebirges begründeten Vor- und Nachteile des Lötschbergtunnels im Vergleich mit einem Wildstrubeltunnel in der Richtung Oberried-Inden oder Oberried-Siders.»

Nach einer gemeinsamen Sitzung in Bern, in welcher die allgemeinen Zielpunkte der Expertise besprochen worden, begaben sich die Herren Kissling und Schardt sofort an die Aufnahmsarbeiten im Lötschberg- und Wildstrubelgebiet.

Die Begehungen fanden nach folgendem Itinerar statt:

1. Gasterenklus und Gasterenthal. Contakt des Granits mit den Sedimenten gegenüber dem Brandhubel und am Gabelbach.
2. Gemmiweg.
3. Fisistock.
4. Lötschpass bis Kummenalp.
5. Sattellegi — in den Simmeln — Felsen unter dem Hockenhorn — auf den Platten — Lötschpass — Kaufmannskumme — Kummenalp nach Kippel.
6. Unteres Lötschthal-Gampel.
7. Gampel-Hohtenn-Meiggen (zum Teil mit v. Fellenberg).
8. Meiggen-Faldumalp-Restialp-Kummenalp-Oberferden — Stierstutz-Kippel.
9. Von Kippel an gemeinsame Begehung des untern Lötschthals mit v. Fellenberg.
10. Gampel-Inden-Varon-Miège-La Prily.
11. La Prily — Plaine morte — Fluh-See-Siebenbrunnen-Lenk.
12. Lenk-Ammertenpass-Engstligenalp-Engstligengrat-Schwarzgrätli-Schwarenbach.
13. Schwarenbach-Üschinenthal-Allmen-Kandersteg.
14. Gasterenboden-Schwarzbach.
15. Öschinen-See-Birre-Mitholz.
16. Kandersteg-Frutigen (Kissling); Kandersteg-Gemmi-Leuk (Schardt).

Die auf den vorgenannten Routen gemachten Beobachtungen wurden in die Karte 1: 50,000 eingetragen und überall, wo es nötig schien, charakteristische Gesteinshandstücke geschlagen.

Eine Sammlung derselben aus dem Lötschberggebiet, 47 Nummern umfassend, legen wir unserem Berichte bei.

I. Allgemeine und topographische Verhältnisse.

Die zu begutachtenden Tunnelprojekte durch den Lötschberg und den Wildstrubel durchschneiden beide das Aarmassiv in seinem westlichen Ende. Aufgebaut aus einem centralen, langelliptischen Kern von Urgestein, dem sogenannten Protogin oder Bankgranit (schieferigen Granit), an welchen sich auf der Südseite eine Reihe steilgestellter Zonen von Gneiss und krystallinischen Schiefern, auf der Nordseite ebenfalls eine Gneisszone anschliesst, wird das Aarmassiv auf der Nordseite von den Ketten der Kalkalpen bedeckt und umsäumt

während auf der Südseite diese Kalkdecke eine sehr beschränkte Ausdehnung hat. Beide zur Untersuchung vorliegenden Tunnelprofile berühren den centralen Teil des Aarmassives nicht mehr sondern das Lötschbergprofil schneidet nur durch die krystallinische Schieferhülle des Protoginskerns auf der Südseite des Lötschenpasses, während es auf der Nordseite die Kalkkette, die dem Centralmassiv vor- und angelagert ist, durchquert. Hingegen durchschneidet der Lötschbergtunnel einen auf der Nordseite der Alpen durchaus isoliert stehenden Gesteinskomplex, nämlich das Massiv des Gasterengranites. Dieser Gasterengranit bildet das Grundgestein im West-Ende des Aarmassives und trägt den Charakter einer abgerundeten Kuppe, bedeckt von den Sedimenten des Verrucanos, der Trias und der sekundären Ablagerungen der Jura- und der Kreidezeit. Auf der Südseite des Lötschenpasses sind die steilgestellten krystallinischen Schiefer (Phyllite) dem Granitkern angelagert und bedecken denselben schalenförmig. Wie sich nun der Gasterengranit zum Protoginkern des Aarmassivs verhält, welcher etwas südlich des Lötschenpasses, erst im Ijollithal, unter dem Mantel krystallinischer Schiefer auftritt, ist nicht bekannt, denn nirgends ist der Kontakt von Gasterengranit und Protogin aufgeschlossen. Auffallend ist das Auftreten des Gasterengranitmassives im äussersten Nordwesten des Aarmassivs und nördlich von der Centralaxe desselben. Auf der Nordseite des Gasterenthales, welches als tief eingesägtes Erosionsthal die dem Granit aufgelagerten, mächtigen Kalkmassen der nördlichen Kalkkette bis auf den Granitkern blossgelegt hat, lehnen sich intensiv gefaltete Kalk- und Kalkschieferschichten verschiedenen Alters an. Topographisch gestaltet sich das Tracé des kürzeren Lötschbergtunnels folgendermassen:

Von der flachen Thalsohle hinter Kandersteg erheben sich gegen Süden die steilen Kalkwände der Fisistöcke und der Altels-Balmhorn-Gruppe, zwischen denen der Gasterenbach sich durch die tiefeingesägte Klus einen Weg ins offenere Gelände von Kandersteg (einen alten Seeboden) durchbrochen hat. In steilen Felswänden erhebt sich über der Tunnelaxe der Fisischafberg, gegen das Gasterenthal in senkrechten Felsen abfallend. Es folgt südöstlich über der Tunnelaxe der Gasterenboden, eine flache Thalsohle, von dem im Schuttland oft seinen Lauf wechselnden Gasterenbach durchflossen. Der Grund besteht aus Alluvionen des Gasterenbaches (Sand und Kiesbänke). Von der Südseite strömen eine ganze Reihe Wildbäche in den Gasterenbach und bilden

durch häufiges Austreten vielfach einen sumpfigen und sandigen Thalgrund. Auf der Südseite von Gasteren folgt nun das mächtige, in hohen senkrechten Kalkwänden zum Gasterenthal abstürzende Massiv der Altels-Balmhorngruppe, unter welchem sich die Tunnelaxe durchzieht. Genau über der Tunnelaxe liegt in hohem Bergkessel die von nackten Felsen umgebene Schafalp Wildelsigen, aus welcher in jähem Sturz in tiefer Klamm der Wildelsigenbach ins Gasterenthal abstürzt. Südlich des Balmhornmassives ändert sich die Konfiguration des Terrains vollständig, und auch das Gestein. Statt hoher Kalkwände, schmaler Felsleisten, tiefeingesägter Rinnen und Hohlkehlen, an deren Fuss sich steile Trümmerfelder hinziehen, stossen wir am eigentlichen Lötschenpass auf eine breite flache Mulde, auf welcher der flache Lötschengletscher ruht, dessen Absturz nach dem Gasterenthale in einer kurzen Zunge abbricht, südlich eingebettet in abgerundete Felshöcker, die sich allmählich gegen das Hockenhorn hinanziehen, dessen Gipfel einem auf breitem Felsgestell aufgesetzten steilen Kegel gleicht. Wir sind inmitten dieser abgerundeten Formen, dieser durch Eiswirkung polierten, geglätteten und gerundeten Felsen plötzlich aus dem Kalkgebirge in das Granitgebirge geraten, welches hier auf dem Lötschpass und an den Westabhängen des Hockenhorns bedeckt wird von einer dünnen Schicht von Quarzsandstein (Arkose), Konglomeraten und halb krystallinen Gesteinen, die dem Perm oder Verrucano zugerechnet werden.

Südlich der gewaltigen Gruppe des Altels-Balmhornmassives, welches ein ausgezeichnetes Beispiel des sog. pultförmigen Aufbaues liefert, indem wie bei Doldenhorn und Blümlisalp die Nordseite in schiefgeneigter, gleichmässig abfallender Fläche erscheint, während die Südseite in terrassenförmig abgestuften, senkrechten Wänden zum Tschingelgletscher und Gasterenthal abstürzt und ein Seitenprofil das genaue Bild eines Pultes darstellt, folgen die so merkwürdigen Südwest-Nordost streichenden kurzen Ketten zwischen Fluhalp und Ferdenthal, zwischen Ferden- und Restithal und zwischen letzterem und Faldumthal, mit den zwischen den fingerförmig ausgestreckten Ausläufern der krystallinen Schiefer des Centralmassivs eingeklemmten und intensiv gefalteten Kalkbergen des Resti- und Faldum-Rothorns. Die Tunnelaxe streicht östlich dieser drei parallelen Ketten durch und verbleibt vermutlich beim Austritt aus dem Granitkern des Lötschpasses in dem sich am letzteren anschmiegenden Mantel von kry-

stallinen Schiefern und Gneissen. Wird nun die Tunnelmündung auf der Südseite etwas weiter nördlich oder südlich angenommen, so befindet sich dieselbe notgedrungenerweise in einem Durchbruchs- oder Querthal. Von Ferden an hat nämlich die Lonza die mächtige Schiefer- und Gneisszone durchbrochen und schluchtartig gestaltet sich das untere Lötschenthal, mit steilen, schutterfüllten Wänden, gewaltigen Lawinenzügen, Schuttkegeln und nur wenige, offene, flache Thalerweiterungen bietend, wiebei Mitthal, Haselleh und Schlegmatte. Namentlich die Ostseite des Gebirges ist stark zerklüftet und von zahlreichen Runsen durchzogen, an deren Fuss mächtige Schuttkegel und alte Bergsturzfelder Zeugnis ablegen von früher stattgefundenen, bedeutenden Oberflächenveränderungen.

Das tiefere Lötschbergprojekt hat ähnliche topographische Verhältnisse aufzuweisen. Der Tunnel bei 1038 auf Schlossweide angesetzt, würde sich unter dem halbkreisförmigen Thalriegel hinziehen, über welchen in mehrfachen Windungen sich die Landstrasse den Bühlstutz hinaufwindet, dann unter dem flachen Thalboden von Kandersteg hindurch. Südlich des Oeschinenbaches würde die Tunnelaxe sich hinziehen unter den beiden kühnen Felspyramiden der Fisistöcke, 2680 m. Letztere fallen sehr rasch in senkrechten, von schmalen Bändern durchzogenen Wänden zum Gasterenboden ab, und die Tunnelaxe würde unter der Thalsohle durchstreichen, da wo dieselbe oberflächlich am schmalsten ist (nordöstlich vom sogenannten Brandhubel), südlich des Gasterenthales unter der östlichen Basis der hohen Kalkwände des Wildelsiggrates, um unterhalb der Gfällalp in den eigentlichen Lötschberg einzutreten und etwas östlich von der projektierten kürzeren Tunnelaxe bis Kilometer 26 zu verbleiben, wo beide Tunnelaxen einander schneiden. Die Oberflächenverhältnisse der beiden Tunnelprojekte bleiben hier annähernd dieselben. Das längere Projekt zieht sich etwas östlich unter dem Ausläufer des Hockenhorns hin, verbleibt aber in demselben Gestein wie das kürzere Projekt und ebenso sind die südlich sich an den Lötschpass anschliessenden Gesteine, und ist die oberflächliche Gestaltung bei beiden Projekten wesentlich dieselbe, ja die ungünstigen Terrainverhältnisse des unteren Lötschenthales dürften sich beim längeren Projekt in noch ungünstigerer Weise geltend machen.

Das in Vergleich zum Lötschbergtunnel und seinen zwei Varianten gezogene Projekt einer Durchbohrung des Wildstrubels,

wobei wir nur das kürzere Projekt eines Tunnels vom Thalboden der Simme bei Oberhaus südöstlich vom Dorfe Oberried bis oberhalb Miège auf dem Plateau von Randogne-Mollins (Nordportal bei 1090, Südportal 1019) in Betracht ziehen, bietet in seiner gesamten Anlage eine grössere Einfachheit der topographischen Verhältnisse dar, als das erstgenannte Projekt des Lötschbergtunnels. Die Tunnelaxe durchschneidet die Kalkalpen zwischen Bern und Wallis. Das krystallinische Centralmassiv ist unter die mächtigen Kalk- und Schiefermassen der Wildstrubel-Wildhornkette in die Tiefe gesunken. Die Topographie dieses zu durchbohrenden Massivs ist ungefähr folgende: Aus dem flachen Thalboden von Oberried südlich von Lenk erhebt sich ein Felsenriegel, durch welchen die Simme sich in malerischen Strudeln eine enge Kluft hindurchgesägt hat. Es ist dies der Rätzliberg mit dem Laubhorn. Letzteres stellt eine sogenannte Klippe dar, indem ältere Kalkbildungen wurzellos auf den tertiären Ablagerungen des Flyschs aufgesetzt sind. Südlich der flachen, quellendurchrieselten Mulde der Rätzlibergalp erhebt sich gleich einer Riesenmauer das gewaltige Felsgestell des Wildstrubels mit dem hochherabhängenden Rätzligletscher. Senkrechte Felsen, unterbrochen durch schmale Bänder, türmen sich stufenlos zum breiten Firnrevier des Rätzligletschers und der Plaine-Morte. Jenseits der Plaine-Morte ragen einzelne untergeordnete Gipfel aus dem breiten Firnrevier hervor, so das Todthorn, der Mont Bonvin und der Autannazgrat und senken sich ohne bedeutende felsige Unterbrechungen zu den weiten, sonnigen Alpen von Colombire, Aprily und der Varneralp, um nur die bedeutendsten zu nennen. Es ist der Südabhang des Wildstrubelmassivs ein weit ausgedehntes, von einzelnen Felsausläufern durchzogenes Alpenland, an welches sich südwärts das von Dörfern übersäte Hügelgelände von Siders-Montana anschliesst. In seinem ganzen Habitus erscheint der Wildstrubel als ein gewaltiges, nordwärts steil abfallendes kastellartiges Bollwerk, dessen breiter Gletschergipfel ca. 5 Kilometer Durchmesser hat. Am Fusse dieses Bollwerks treten zahlreiche Quellen zu Tage, die berühmten Siebenbrunnen, und zahlreiche Bäche stürzen in Kaskaden über die hohen Felswände zu Thal, so der Trübbach, Fluhbach, Laubbach u. a. Auf der sanft geneigten Südseite sammeln sich die Schmelzwasser der Plaine-Morte zu grösseren, in tiefeingeschnittenen Schluchten fliessenden Bächen, so der Bach von Colombire, La Zesse mit zahlreichen Zuflüssen,

La Posa bei Aprily vom Autannazgrat herkommend und andere. Sehr günstig liegen beim Wildstrubelprojekt die beiden Mundlöcher, das nördliche auf dem von der Simme durchströmten Thalboden von Oberried, das südliche an den freien sanften Abhängen des Plateaus Randogne-Mollins, in der Nähe der in Siders in die Rhone fliessenden Sinièze.

II. Allgemeine geologische Übersicht.

Das zwischen Wildstrubel und Hockenhorn gelegene Gebiet der Berner Hochalpen zeichnet sich durch eine der merkwürdigsten Erscheinungen aus. Die Sedimentärgebilde, welche zwischen der Lenk und Siders noch das ganze Gebirge bis in die tiefsten Teile zusammensetzen, weichen vom Gemmipass an nach Nordwesten und Südosten auseinander, indem immer tiefere Schichten zu Tage treten, bis dass auf der Linie Feschel-Gasteren das krystallinische Grundgebirge sichtbar wird, dessen Oberfläche bald bis über 3000 m Meereshöhe ansteigt.

Der durch das Auftauchen des krystallinen Grundgebirges aufgerissene Sedimentmantel teilt sich in zwei sehr ungleiche Streifen. Der südliche nimmt eine ganz untergeordnete Lage am Nordabhang des Rhonethales ein; bei Gampel schon unterbrochen, steigt die südliche Sedimentdecke noch einmal am Fusse des Centralmassivs auf und setzt zuletzt am Baltschiederthal vollständig ab.

Der nördliche Sedimentstreifen ist viel bedeutender. Obschon derselbe sichtlich nach Norden gedrängt erscheint und im Vergleich mit der Breite des Wildstrubelgebirges beträchtlich reduziert ist, so finden wir in demselben alle tektonischen Elemente wieder, welche die Wildstrubelgruppe aufbauen. Die Zone von Kalkketten, welche zwischen Adelboden und Haslithal dem Aarmassiv entlang streichen oder an dessen Fuss angelehnt sind, entspricht also vollständig dem kulminierenden Teil der Wildstrubelgruppe. Wenn auch topographisch anders orientiert und weniger hoch, so ist sie doch die geologische Fortsetzung dieses Gebirgsteiles.

Deshalb treffen wir auch in den beiden vorgeschlagenen Tracés für den Durchstich der Berneralpen ganz verschiedene geologische Verhältnisse, wenn auch beide scheinbar dieselbe Gebirgskette durchqueren.

Bevor wir zur Besprechung der für die Bohrung wichtigen geologischen und petrographischen Verhältnisse schreiten, wird es sich lohnen, die tektonischen Verhältnisse, d. h. den Gebirgsbau und die Schichtenlage etwas eingehender ins Auge zu fassen. Zu diesem Zwecke müssen wir vor allem die verschiedenen Formationsglieder kennen lernen, welche am Aufbau des Gebirges teilnehmen:

A. Stratigraphische Übersicht.

Quartär. Gebirgsschutt. Überall lehnen sich am Fusse der Felsabstürze, den Thälern und Kummen entlang, Schutthalden und Schuttkegel an. Letztere sind besonders da am schönsten ausgebildet, wo Runsen das felsige Gehänge angeschnitten haben.

Bergsturz-Ablagerungen, von grösseren, plötzlichen Felsstürzen herrührend, sind um Kandersteg mehrere vorhanden. Der Öschinensee verdankt seine Entstehung einer Abdämmung des oberen Teiles des Öschinenthales durch einen gewaltigen Bergsturz, dessen Abrissnische unterhalb vom Biberggletscher deutlich sichtbar ist.

Ein anderer, noch viel bedeutenderer Bergsturz, vom N.-E.-Abhang des Fisistockes herrührend, hat seine Schuttmassen bis über das Blau-Seeli hinaus geschleudert. Diese Schuttmassen, welche die Hügel bei Bühl und die Anhäufungen bei Schlossweide bilden, sollen zur Entstehung der über 160 m hohen Thalstufe von Kandersteg Veranlassung gegeben haben. Wegen der Wichtigkeit dieser Schuttablagerung für das tiefere Lötschbergtunnelprojekt soll deren Beschaffenheit und Entstehung weiter unten noch besonders beschrieben und erörtert werden.

Fluss- und Bachaufschüttungen sind in allen breiteren Thälern häufig und sehr ausgebreitet. So besteht der Boden des unteren Gasterenthales aus Bachschuttanhäufungen. Der Boden von Kandersteg besteht zum Teil aus Flussalluvium der Kander; andererseits hat der Öschinenbach einen etwas flachen Schuttkegel in den Thalboden vorgeschoben. Der zum Teil sumpfige Thalgrund bei Eggenschwand und zwischen Bühl und Kandersteg mag teilweise auch als ein ausgefülltes Seebecken betrachtet werden.

Ältere Alluvialbildungen und Gletscher-Ablagerungen können kaum unterschieden werden. Hingegen sind Moränen aus der

Rückzugsperiode der Gletscher auf dem Thalboden von Kandersteg selbst, bei Eggenschwand, sichtbar. Die Thalstufe von Bühlstutz ist mit den Moränen, welche offenbar von dem früheren Öschinen-Gletscher herrühren, in sehr wahrscheinlichem Zusammenhange. Auch diese Frage soll weiter unten noch speziell behandelt werden.

Tertiär. Die jüngste Tertiärbildung ist der Flysch, bestehend aus thonigen, oft fein sandigen, glimmerführenden Schiefern und Mergeln mit Sandstein-Zwischenlagerungen. Ächter Flysch ist bei Kandersteg nur untergeordnet vorhanden. In der Gegend von der Lenk, am Fusse des Laubhorns über Siebenbrunnen tritt hingegen Flysch in typischer Entwicklung und bedeutender Mächtigkeit auf.

Bei Kandersteg ist an Stelle von schieferigem Flysch eine mächtige Sandsteinformation vorhanden, welche vielleicht auch die Nummulitenkalke zum Teil vertritt. Es sind hellgraue, gelbliche bis weisse, bald rot, bald grünlichgefärbte, quarzitische Sandsteine, hie und da mit ähnlich gefärbten Mergeln abwechselnd. Oberflächlich sind diese Sandsteine oft braun angewittert. Sie enthalten spärliche Nummuliten. Zur Unterscheidung von eigentlichen Flyschsandsteinen nennen wir diese Sandsteine Nummulitensandsteine.

Die bedeutende Widerstandsfähigkeit dieser Formation hat zur Folge, dass wir diese Sandsteinlager in mächtigen Felswänden antreffen. So besteht der ganze Nordabsturz des Fisistockes, sowie dessen Gipfelpartie aus Nummulitensandstein.

Die eigentliche Nummulitenformation besteht aus bankigen und schiefrigen Kalken, welche oft erfüllt sind von unzähligen Nummuliten (Siebenbrunnen oberhalb Lenk), oft sich aber auch als fast ganz steril erweisen (Fuss des Gällihorns).

Eine besondere Ausbildung des eocänen Kalkes ist der sogenannte Lithothamnienkalk: ein dichter, hellgrauer, ganz von fossilen Organismen erfüllter Kalkstein, welcher Felswände von 20—30 Meter Höhe bildet und leicht mit Schrattenkalk (Urgon) verwechselt werden könnte. (Im Stein bei der Lenk, Winteregg auf der Gemmi, Schnittboden, Eggenschwand).

Kreideformation. Gault und Aptien. Finden sich in unbedeutender Mächtigkeit in der Umgebung des Wildstrubelgipfels, am Ammertenhorn und am Gletscherhorn. Es sind Sandsteine und schiefrige Mergel. Für die Tunnelprojekte ohne Bedeutung, da diese Formationen wahrscheinlich nicht angetroffen werden.

Urgonien. Schrattenkalk. Grauer bis weisser, oft aber auch dunkler, dichter Kalk. Gewöhnlich ein einziges 80 bis 150 m mächtiges Lager bildend, welches von weitem als Felsgesims beobachtet und verfolgt werden kann, wodurch dieses Gestein sowohl durch seine Farbe, als auch in der Topographie, dank seiner unbedeutenden Verwitterung aufs deutlichste hervortritt. Am Fisistock, in dem Felsgraben zwischen den beiden Gipfeln, fanden wir eine Kalkschicht erfüllt mit Gasteropoden, Requienien und Radiolites, welche für das Alter des hellen Kalkes unter den Sandstein-Schichten der Gipfelpartie bezeichnend sind.

Hauterivien, Mittleres Neocom, dunkle, graue, oft quarzige und sandige, braun anwitternde Kalke mit eingelagerten Mergeln. Gewöhnlich Durchschnitte von Seeigeln (Toxaster) aufweisend. 150 bis 200 m mächtig, stellenweise mehr.

Valangien, Unteres Neocom. Kalke und dunkle Mergel (Berriasschiefer). Wenig Fossilien enthaltend. (Cidaris pretiosa bei Schwarenbach) Mächtigkeit 100—120 m. Durch Zusammenfaltung scheint die Mächtigkeit des Neocoms oft sehr bedeutend, während durch Streckung und Auswalzung dieselbe bis auf weniges reduziert sein kann.

Juraformation. Malm oder oberer Jura bildet vorerst eine 100—120 m mächtige Kalkwand, sogenannter Hochgebirgskalk, unter welchem sich plattige bis schieferige graue Kalke vorfinden. Letztere entsprechen der Oxfordstufe, 50—100 m. Dogger oder Mittlerer Jura; dunkle spätige Kalke, oft als Eisenoolith ausgebildet oder auch dunkle, schieferige Kalke, vom oberen Lias schwer zu unterscheiden, 100—150 m.

Lias oder Unterer Jura, bildet drei Abteilungen. Eine obere, schieferige Abteilung entspricht dem oberen Lias. Die mittlere besteht aus einer mächtigen Breccienschicht, viel Belemniten enthaltend. Diese Breccie besteht aus Quarz- und Dolomit-Körnern, welch letztere besonders auf der ausgewitterten Oberfläche durch ihre gelbliche Färbung deutlich hervortreten. Echinodermentrümmer scheinen stellenweise ebenfalls beigemengt. An der Abdachung des Balmhorns gegen den Lötschengletscher zu hat diese Schicht eine ganz bedeutende Mächtigkeit, durch Auffaltung bis fast zu 500 m gesteigert. Zwischen Leukerbad und Inden beobachtet man eine rätselhafte Formation aus grauen und grünlichen quarzitischen Sandsteinen

bestehend, welche eine ausserordentliche Mächtigkeit haben. Sie hangen offenbar mit den mittleren Liasbreccien des Torrenthorn, dieselben wie am Balmhorn, zusammen. Es sind ebenfalls Belemniten darin gefunden worden. Der Übergang in Breccien mit Dolomittrümmern ist an Ort und Stelle zu beobachten. Der untere Lias ist durch schieferige, oft auch brecciöse Kalke vertreten. 50—100 m, wenn nicht aufgefaltet oder gestreckt.

Trias. Besteht aus drei Lagen, welche im allgemeinen eine ganz unbedeutende Mächtigkeit aufweisen, aber ausserordentlich konstante und sehr ausgeprägte Eigenschaften haben. Zu oberst sind glänzende dunkle, oft grünliche oder rote Schiefer, sogen. Quartenschiefer. Dann folgt typischer Rötidolomit, oft in Rauchwacke umgewandelt. Zu unterst liegt graue oder bunte, rötliche oder grünliche Arkose, sandsteinartig, ja oft conglomeratisch. Dieses Gestein ist gewöhnlich unter dem Namen Verrucano beschrieben und dem Permien zugerechnet worden. Der Farbenwechsel dieses Sandsteins hängt mit der Herkunft seiner Bestandteile zusammen. Über dem roten Gasteren-Granit ist die Arkose rötlich, über dem grünen Granit ist deren Farbe grünlich, oder beide Töne wechseln ab. Auf der Westabdachung des Lötschberges, wo viel Sericitschiefer liegen, ist die Arkose vorherrschend grau-sandig.

Zu den sedimentären Ablagerungen, möglicherweise zur Kohlenformation kann noch gerechnet werden ein schwarzer Schiefer, welcher im Lötschenthale unterhalb der Faldumalp bei Goltschenried ansteht. Er ist zwischen Sericitschiefern eingeschaltet, enthält Graphiteinlagerungen in Nesterform, was auch wohl für Kohlenformation sprechen mag.

Dieses ist das älteste sichere Sediment des untersuchten Gebietes. Sichere Vertreter des Carbon, oder einer noch älteren Abteilung des Palaeozoicums haben wir nicht konstatieren können, obschon die Sericitschiefer möglicherweise metamorphe Sedimente sind.

Grundgebirg. Zu dieser Abteilung rechnen wir alle krystallinen Schiefer, Gneisse, Chloritschiefer, Amphibolschiefer, Amphibolite, Grünsteine, Serpentine und Giltsteine, welche in unzähligen Wechsellagerungen gleich Sedimenten beiderseits des Gneissgranites oder Protogins auftreten. Die Glimmerschiefer sind entweder gewöhnliche Muscovitschiefer, oder graue Sericitschiefer, oft chloritisch und dann grünlich gefärbt. Wir haben letztere,

mit den Amphibolgesteinen und Serpentinen zusammengefasst, unter derselben Bezeichnung als grüne Schiefer in den Profilen eingetragen.

Alle diese Gesteine, sowie der schöne Gasteren-Granit mit seinen Porphyrgängen, sind von Dr. v. Fellenberg aufs eingehendste beschrieben worden. (Geologische Beschreibung des westlichen Teiles des Aarmassivs; Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. XXI. Liefer. I. 1893.) Es soll im speziell technischen Teile dieses Gutachtens noch besonders von diesen verschiedenen Gesteinsarten die Rede sein. Es ist noch hervorzuheben, dass sowohl die Sericitschiefer und Gneisse, sowie die grünen Schiefer häufig von Mikrogranit- und Aplitgängen (sog. Eurit) durchsetzt sind. Diese sehr quarzreichen hellen Ganggesteine sind oft 5—30 m mächtig. Zwischen Restithal und Meiggen durchsetzen unzählige solcher Gänge die Sericitgneisse und Schiefer in sehr steiler Lage, teils konkordant mit dem Fallen der Schiefer, teils mehr oder weniger schief.

Bezüglich der Porphyrgänge, welche im Gasterengranit auftreten, kann noch hervorgehoben werden, dass dieselben auf der Südseite des Granitzuges viel häufiger auftreten als auf der Nordseite desselben, soweit derselbe nämlich abgedeckt und sichtbar ist. Am Südabhang des Grates unterhalb Hockenhorn, zwischen Sattelegi und dem Lötschenpass (in den «Simmeln» und «Auf den Platten») sind Wechsellagerungen von Granitporphyr und körnigem Granit deutlich sichtbar. Dabei zeigt sich eine so deutliche Einwirkung der Druckmetamorphose, dass der Porphyr dicht schiefrig und der Granit arkoseähnlich körnig wird. Zwischen «Auf den Platten» und dem Lötschenpass is dies so sehr der Fall, dass man nie sicher ist, ob das Gestein Arkose, also sedimentär ist, oder ob es zum Granit gehört. Die Unterscheidung ist um so schwieriger ohne Zuhilfenahme des Mikroskops und Dünnschliffes, da die Arkose ebenfalls aus Granittrümmern zusammengesetzt ist und bei Druckmetamorphose mikroskopisch wenigstens ganz dieselbe Zusammensetzung und Struktur aufweisen muss wie gepresster Gasterengranit. Das einzige Kriterium ist eben die Wechsellagerung von dichten und körnigen Gesteinen, was bei der echten Triasarkose gewöhnlich nicht vorkommt, aber wohl vorkommen könnte. Letztere hat gewöhnlich nur 5—10 m Mächtigkeit und besteht meist nur aus einer einzigen Lage oder aus zwei durch dunkle Schiefer getrennten Lagen von Sandstein.

B. Tektonische Übersicht.

Der bezeichnende Charakterzug des Gebirgsbaues zwischen Wildstrubel und Lötschenpass ist, abgesehen von dem Hervortreten des krystallinen Centralmassivs, dass die Sedimentdecke sowohl am Wildstrubel, wo sie noch ganz ist, als auch zwischen Gasterenthal und Engstligenthal, wo sie nach Norden zurückgedrängt und vom Centralmassiv abgerutscht ist, eine einzige grosse liegende Falte aufweist, deren hängender Flügel sowohl als der Stirnrand eine ganze Reihe kleiner Falten als fast regelmässig ausgebildete Mulden und Gewölbe zeigt.

Es ist dies wahrscheinlich dieselbe grosse liegende Falte, welche von den Glarneralpen her über die Unterwaldner-Alpen sich hinüberzieht, sich in der Faulhorngruppe wiederfindet, über Dündenhorn, Lohner und Wildhorn weiter streicht bis in die Waadtländer Alpen (Dents de Morcles), und sogar jenseits der Rhone die ganz ansehnliche Faltendecke der Dents du Midi-Tours Salières umfasst. Vielleicht ist ein Teil der Savoyer Alpenkette noch in das Bereich dieser merkwürdigen tektonischen Erscheinung hineinzuziehen.

Wenn wir die Sachlage in der Wildstrubelgruppe schematisch darstellen wollen, so wird sich das Bild etwa folgendermassen ausnehmen:

(Siehe Fig. 1 nebenstehender Tafel.)

Die mehr als 12 Kilometer lange Falte beweist also, dass zwischen Rhonethal und Lenk die Sedimentdecke nicht nur doppelt, sondern stellenweise sogar dreifach ist; ursprünglich muss dieselbe auf der ganzen Breite einfach gewesen sein. Rechnet man noch die Auffaltungen des hängenden und des mittleren Flügels dazu, so darf man wohl annehmen, dass eine Schichtendecke von nahezu 40 Kilometer Breite durch diese gewaltige Faltung auf kaum 13 Kilometer reduziert wurde.

Merkwürdig ist die gewölbeartige Auffaltung oder Aufbauchung, infolge welcher das Eocän der eingeklemmten liegenden Mulde bei Colombire, Nousey, Trubeln etc. wieder zum Vorschein kommt; es ist dieselbe Tertiärmulde, welche bei Siebenbrunnen unter der Kalkwand des Ammertenhornes untertaucht. Diese Aufbauchung der dreifachen Sedimentdecke kann man als eine Andeutung des auftauchenden Centralmassivs ansehen. Der Vergleich obiger Skizze mit dem folgen-

Fig. I.

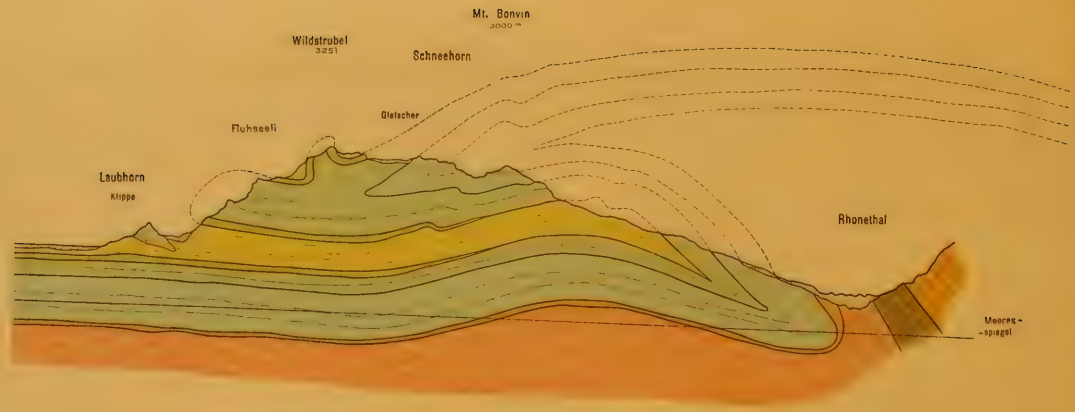
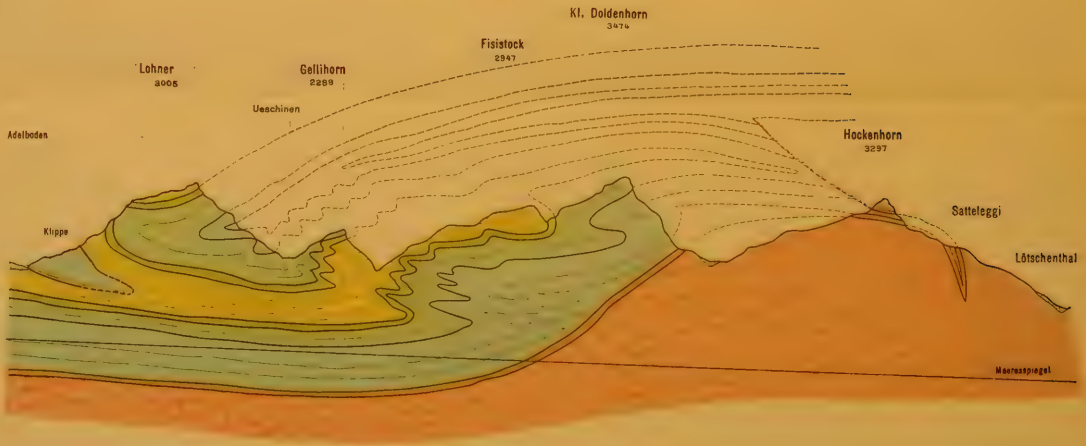
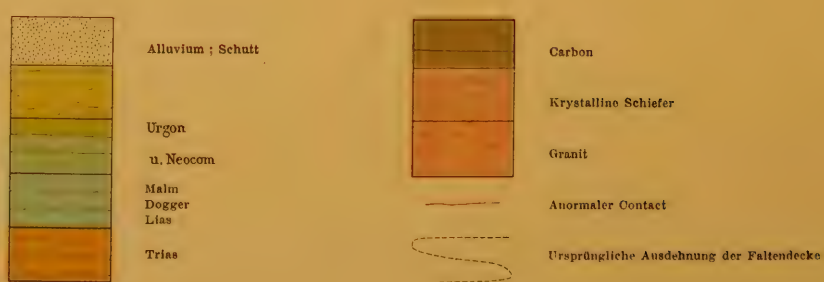


Fig. II.





1 : 100 000

CHAMP. KUNSTANSTALT H. & A. RUMMERLY & FRCH. BERN

den Bild zeigt dieses Verhältnis aufs deutlichste. Es geht daraus noch die weitere Erkenntnis hervor, dass nämlich durch das Auftauchen des Centralmassivs diese dreifache Faltendecke thatsächlich auf der steilen Nordabdachung gegen den freien Raum zu abgerutscht ist; das beweist die Zickzackfaltung am Fisistock und am Gällihorn etc.

(Siehe Fig. 2 auf nebenstehender Tafel.)

Diese synthetischen Skizzen, welche in vereinfachter Form die an der Oberfläche sichtbaren Verhältnisse unterirdisch in Verbindung bringen, erlauben, die Tunnelprofile durch den Wildstrubel und durch den Lötschberg trotz ihrer grossen Verschiedenheit zu vergleichen.

Über dem Hockenhorn, welches jetzt dieselbe topographische Lage hat wie der Wildstrubel, muss früher, vor der Erhebung des Centralmassivs, dieselbe liegende Falte gelegen haben, wie auf dem Wildstrubel. Dieselbe ist aber nach Norden abgerutscht und sie liegt nun, allerdings durch Erosion sehr reduziert, in zusammengeknittertem Zustande am Fusse des Centralmassivs. Die frühere Ausdehnung und Lage der schleifenförmigen Falte wird durch die punktierten Linien angedeutet. Ein Zusammenhang, welcher durch die zwischen Granit und Schiefer eingeklemmten Sedimente am Hockenhorn thatsächlich bewiesen ist.

Dass der angedeutete Zusammenhang wirklich der richtige ist, wird ausserdem durch den Verlauf des Tertiärs oberhalb Siders bewiesen. Die bei Colombire anstehenden eocänen Sandsteine streichen südlich des Mont-Bonvin und des Mont-Tubang vorüber und sind auf den Weiden von Nousey schön abgedeckt; sie setzen über Varneralp und Trubeln bis an die Winteregg oberhalb Kandersteg fort, genau parallel der Einsattelung des Gemmipasses. Hier ist deren Zusammenhang mit denselben Sandsteinen des Nassenboden und Schwarzen Tschuggen und mit der Decke an der Nordseite und im Gipfelgebiet des Fisistockes offenbar. Dass diese eocänen Sandsteine sich dann am Ostabhange des Öschinenthales hinziehen, ist bekannt. Das schöne liegende Gewölbe des Dündenhorn liegt auf einer Eocänmulde. Diese scheint sich dann gegen den Hochthürlipass hinzuziehen. Sie muss notgedrungen mit dem Eocän von Mürren und der Scheidegg in Zusammenhang gebracht werden. Wie leicht begreiflich, ist das Gestein aber nicht fortgesetzt anstehend zu sehen, weil es von älteren Sedimenten eingeschlossen sein kann, oder wenn anstehend, oftmals von Eis und Schnee bedeckt.

Diese kurze Übersicht, welche mit Detailbeschreibungen unserer Aufnahmen belegt werden könnte, mag für den gegenwärtigen Zweck genügen. Der Vergleich obiger Skizzen mit der Karte und den Detailprofilen giebt mehr Aufklärung und Belehrung als ein ganzer Band Beschreibung.

Es bleibt nur noch ein besonderer Punkt zur Besprechung übrig, nämlich

C. Das Schuttgebiet von Kandersteg.

Indem das tiefere Tunnelprojekt durch den Lötschberg gerade diese Schuttausfüllung zu durchstechen hätte und zwar auf eine Strecke von fast $2^1/_2$ Kilometern, so ist es angezeigt, die Natur und Beschaffenheit dieser mächtigen Schuttablagerung näher zu besprechen.

Oben erwähnten wir schon, dass die Hügel von Bühl und von Schlossweid bei Mittholz unterhalb Bühlstutz mit Blockanhäufungen bedeckt sind, welche, der Natur des Gesteins nach zu schliessen, unzweifelhaft einem Bergsturz zuzuschreiben sind, welcher sich vom Nordostabhang des Fisistockes ablösend bis Kandergrund hinunterrollte, also fast 8 Kilometer von der Abrissstelle entfernt. Diese Thatsache steht fest. Darauf wurde verschiedenerseits die Ansicht begründet, die ganze Trümmeranhäufung am Bühlstutz, welcher die Thalstufe des mehr als 160 m höher gelegenen Kanderstegbodens bildet, sei gerade durch diesen Bergsturz entstanden.

Vor allem steht sicher, dass diese Thalstufe von Bühlstutz kein Felsriegel, sondern eine wirkliche Schuttanhäufung ist. Daraus geht des weiteren hervor, dass zur Zeit, als diese Schuttablagerung noch nicht da war, das tiefere Kanderthal von Mittholz aufwärts mit gleichförmigem Gefälle sich bis an den Eingang zur Klus und des Öschinenthales ausdehnte. An Stelle des jetzigen flachen Thalgrundes von Kandersteg lag früher ein viel tiefer eingeschnittenes Thal. Ziehen wir noch den Umstand in Betracht, dass schon bei Mittholz und Schlossweide eine bedeutende Schuttausfüllung auf dem Thalgrunde liegt, so dürfen wir wohl annehmen, dass die Höhe der Schuttanhäufung am Bühlstutz nicht weniger als 200 m über den Felsgrund des Thaleinschnittes sich erhebt. Bei Kandersteg mag die Schuttaufhäufung wohl noch 150 m betragen und bei Eggenschwand etwa 100 m.

Wäre nun die Thalstufe von Bühlstutz eine Schuttablagerung, vom erwähnten Bergsturz vom Fisistock herrührend, so müsste der-

selbe ursprünglich eine eigentliche Abdämmung des oberen Kanderthales erzeugt haben. Ungefähr so wie jetzt noch der Öschinensee, müsste nach dem Sturz das Thalstück oberhalb der Sperre sich mit Wasser gefüllt haben. In diesem Falle wäre der flache Thalgrund von Kandersteg als ausgefülltes Seebecken zu denken.

Unsere Aufnahmen haben aber dargethan, dass ein Teil des Kanderstegergrundes von Moränen bedeckt ist, besonders bei Eggenschwand. Diese Moränenhügel hängen aufs deutlichste mit der bedeutenden Schuttanhäufung zusammen, welche den Hügel «Auf der Höhe» genannt, bildet. Wir haben ausserdem festgestellt, dass das Bergsturzmaterial von Bühl bis Schlossweide nur oberflächlich liegt, und dass darunter sich überall dieselbe hauptsächlich aus Jura- und Kreidegeschieben bestehende Moräne sich vorfindet.

Aus diesen Beobachtungen gehen zwei Thatsachen hervor:

1. dass der Bühlstutz aus Moräne besteht und dass 2. der Bergsturz vom Fisistock erst nachträglich auf die Moräne gestürzt ist. Das Fehlen von Sandsteintrümmern zwischen dem Abrissgebiet und dem Bühl, wo die ersten Sandsteinblöcke vom Fisistock sich zeigen, mag vielleicht dem Umstand zuzuschreiben sein, dass der Sturz stattfand, als der Gletscher, durch welchen die Moräne entstand, noch vorhanden war und das Schuttmaterial auf dem Gletscher ins Thal herunterrollte, was auch das ausgedehnte Zerstreuungsgebiet erklärt.

Der Gletscher muss unbedingt aus dem Öschinenthal herausgeflossen sein, das beweist das Schuttmaterial, dem Trümmer von Gasterengranit durchaus fehlen; auch die Form der Moränenhügel zwischen Eggenschwand und Bühl zeigt eine so deutliche bogenförmige Anordnung, dass deren Natur als Stirnmoränen eines früheren Öschinengletschers nicht verkannt werden kann.

Warum der Öschinengletscher noch bis Kandersteg vorstossen konnte, während der Gasterengletscher sich schon in sein oberes Thal zurückgezogen hatte, mag seine Erklärung in dem hochgelegenen, sehr ausgedehnten Firngebiet und dem sehr steilen Gefälle des Öschinengletschers finden.

Es darf somit angenommen werden, dass die Thalausfüllung von Kandersteg, den oberflächlichen Teil ausgenommen, vollständig aus Moräne besteht und zwar im tieferen Teil aus Grundmoräne, im oberen und am nördlichen Thalrand aus Stirnmoräne. Mit diesem Umstande hängt auch die Erscheinung zusammen, dass

beidseitig vom Thalboden bedeutende Quellen aus den Neocomkalken besonders aber aus den tertiären Sandsteinen entspringen. Wäre die Ausfüllung Bergsturz, so würden die Quellen nicht zu Tage treten, sondern unterirdisch abfliessen und wahrscheinlich erst bei der Schlossweide oder an irgend einer Stelle des Thalriegels am Bühlstutz austreten. Moräne, besonders Grundmoräne ist aber meist wasserdichtes Material, wodurch das seitlich von den Thalgehängen ausfliessende Quellwasser gestaut wird und zwischen Gletscherschutt und Fels aufsteigend bis an die Oberfläche dringen muss. Dieser Umstand soll noch bei Besprechung der Wasserverhältnisse des tieferen Lötschbergtunnels in Erwägung gezogen werden.

III. Spezielle geologische Beschreibung der Tunnelprofile.

A. Lötschberg.

I. Der kürzere Tunnel 12,9 km.

Der kürzere Tunnel trifft, abgesehen von einer unbedeutenden kleinen Schutthalde beim Nordportal, überall gewachsenen, anstehenden Fels.

Nach der Natur desselben ergeben sich für das Tracé ohne weiteres 3 Sektionen:

a) Nördliche Sektion — im Kalk;
b) Mittlere Sektion — im Gasterengranit;
c) Südliche Sektion — in den krystallinen Schiefern.

a. Nördliche Sektion.

Die nördliche Sektion begreift die Tunnelstrecke unter dem Fisistock, dem Gasterenthal und seinem nördlichen Thalhang, bis zum Kontakt mit dem Granitstock, umfasst also das Stück vom nördlichen Tunnelportal auf dem rechten Kanderufer bis zu Km 23 circa.

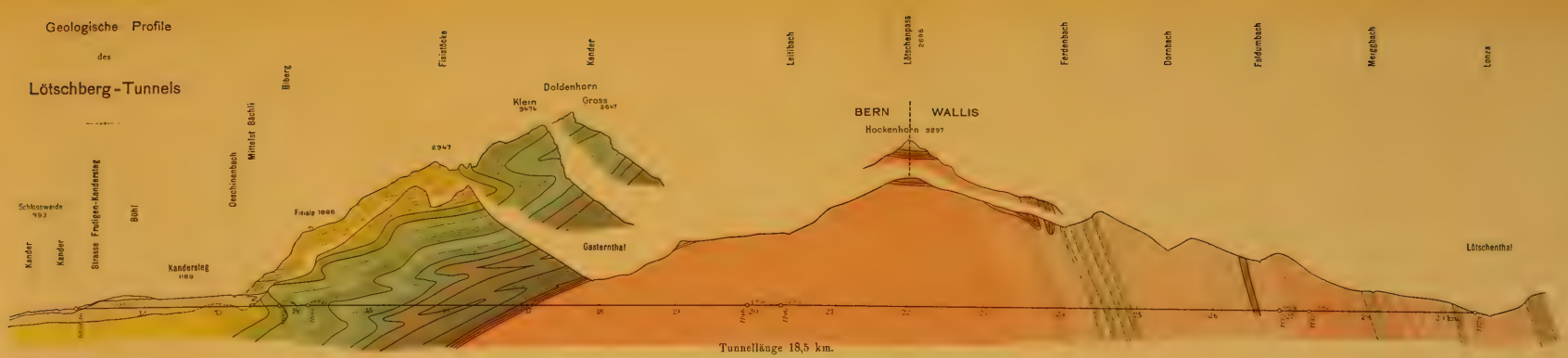
Die Sektion ist fast ausschliesslich im Kalkmantel angelegt. Da dessen Schichten, wie aus den Ausführungen des vorigen Kapitels hervorgeht, in mehrere Falten geworfen sind, so wird es kaum möglich sein, die genaue Begrenzung der einzelnen Schichten in der Tiefe herauszufinden. Doch haben wir genügend Anhaltspunkte, um über die Natur der kalkigen Sedimente, soweit sie für den Tunnelbau in Betracht kommen, Aufschluss geben zu können.

Der Tunnel tritt hinter dem Hotel Bären ein in dunkle, spätige oberflächlich braun anwitternde Kalke, die dem Urgon angehören

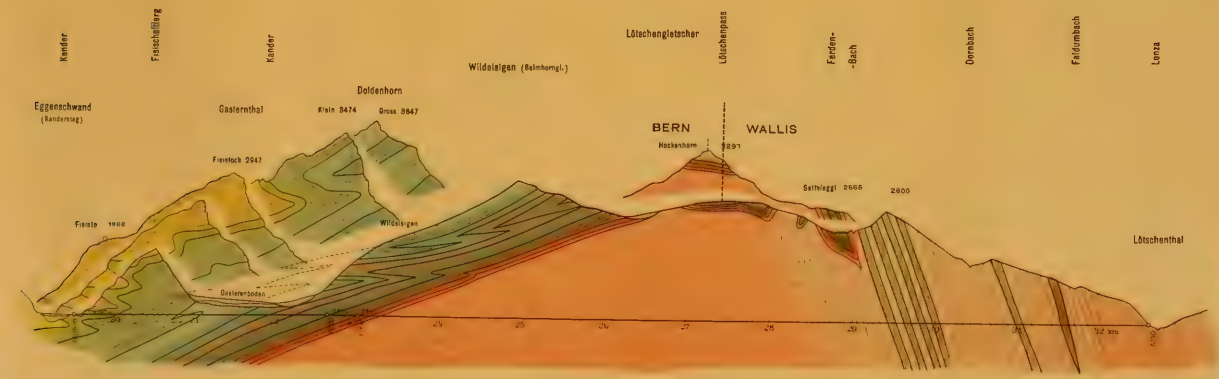
Geologische Profile

des

Lötschberg-Tunnels



Tunnellänge 18,5 km.



Tunnellänge 12,9 km.

Gletscher	Dogger	Jura
Gebirgsschutt; Bergsturz	Oberer Lias (Schiefer)	Jura
Alluvium	Mittlerer Lias (Breccie)	Jura
Moränen	Unterer Lias (Schiefer)	Jura
Flysch, schieferige Thone u. Mergel	Graue, oft bunte Schiefer	Trias
Nummulitensandstein, quarzitisch	Dolomit und Rauchwacke	Trias
Nummulitenkalk und Schiefer	Arkose-Sandstein	Trias
Gault und Aptien	Schwarzer Thonschiefer	
Urgonien	Sericit-Glimmerschiefer	
Hauterivien	Grüne Schiefer, Amphibolit, Serpentin, Topfstein	
Valangien (Berrias)	Gasteren Granit, mit Porphyrgängen	
Hochgebirgskalk, oberer Malm	Aplitgänge im Gneiss und Glimmerschiefer	
Oxford Schiefer, unterer Malm		

Neocomien

Jura

Massstab 1 : 50 000

mögen und bis Km 20 ungefähr anhalten. (No. 1—4 der Gesteinshandstücke.) Die Schichten fallen in dicken Bänken schwach N. W. und sind durchsetzt von einer fast senkrecht stehenden Klüftung.

Dann folgen ähnliche Kalke, dem Neocom angehörend, und bei Km 20.6 schwarze, thonige, sehr stark gefaltete und leicht verwitterbare Schiefer (No. 5).

Unter dem Gasterenboden stehen die ober- und mitteljurassischen Schichten an (No. 6—10). Die Hauptmasse derselben gehört wohl zum Hochgebirgskalk, einem dunkeln, bald dickbankigen, bald dünngeschichteten, hellklingenden Kalk von splittrigem Bruch. Das Gestein ist im allgemeinen fest und von geringer Verwitterbarkeit.

Von Km 22 an ungefähr folgen die Liasschichten: Echinodermenbreccien, massige, spätige, körnige Kalksteine mit Quarzkörnern und eingebetteten Dolomitbrocken (No. 11 und 12) und dunkelgraue, glänzende, dünnschiefrige, leicht verwitterbare Thonschiefer von nicht sehr bedeutender Mächtigkeit (No. 13 und 14). Der unterste Teil derselben könnte vielleicht den sonst buntgefärbten Triasschiefern angehören.

Gegen den Granitkontakt zu bei Km 23 circa trifft der Tunnel auf den Rötidolomit, einen dichten dolomitischen Kalk in massigen Bänken von bläulichschwarzer bis rosenroter Farbe mit der bekannten gelben Verwitterungsrinde und von splittrigem Bruch (No. 15 und 16).

Am Kontakt selber erscheint die Arkose (No. 17 und 18), körniger Trümmersandstein aus Quarz- und Feldspatkörnern bestehend, klein- oder grobkörnig, von weisslichgrauer oder grünlicher Farbe und in dicken Bänken. Mächtigkeit 6 m. (Auf dem Profil der Deutlichkeit halber zu mächtig angegeben, wie auch der Rötidolomit und die sog. Triasschiefer.)

Die sämtlichen, vom Südfuss des Fisistockes an auftretenden Schichten fallen mit circa 25° N. W.

In Bezug auf die Bohrung ist diese nördliche Sektion natürlicherweise die leichteste. Der Bohrfortschritt in den Kalkschichten wird ungefähr demjenigen entsprechen, wie er im gewöhnlichen Alpenkalkstein erreicht wird. (Am Gotthard im Dolomit 11—13 m pro Tag.) Grösser wird er sein in den Neocom- und Liasschiefern, geringer in der harten Arkosebank.

Die Sprengwirkung in den kompakten Kalkbänken ist bekannter-

massen eine sehr grosse, wird aber sehr stark beeinträchtigt durch die wenig geneigte Schichtenlage.

Wenn auch grössere Partien der Tunnelröhre in festen Kalk fallen, so wird doch aus später zu erörternden Gründen eine Ausmauerung der ganzen Sektion notwendig sein. Gebirgsdruck könnte sich unliebsam bemerkbar machen in den Liasschiefern bei Km 22.5.

Die Länge dieser Sektion beträgt circa 3,8 Km.

b. Mittlere Sektion.

Sie umfasst diejenige Tunnelstrecke, in welcher der Granitstock von Gasteren durchbohrt wird.

Der Gasterengranit ist der einzige ächte Granit der Berneralpen, ein körniges Gemenge von weissem Orthoklasfeldspath, grünlichem Plagioklasfeldspath, schwarzem oder tombakbraunem, stets in 6seitigen Blättchen ausgebildetem Glimmer und gleichmässig verteiltem Quarz.

An Stelle des grünlichen Plagioklasfeldspathes tritt hin und wieder ein pfirsichblütrot gefärbter. Dieser rote Gasterengranit (No. 21) erscheint aber nur in untergeordneten Partien, nesterweise im gewöhnlichen Granit.

Die Struktur des Granits ist eine durchaus richtungslose, massige. Nach dem Korn ergeben sich eine Menge von Varietäten. No. 19 z. B. grobkörnige Varietät mit vorwaltend grünem Feldspath (grüner Gasterengranit), No. 20 mittelkörnige Varietät mit vorwaltend weissem Feldspath (weisser Gasterengranit).

Ein steilgestelltes Kluftsystem sondert die Granitmasse in Bänke von $^1/_2$—$1^1/_2$ m Dicke.

Schon auf der Nordseite des Granitmassivs ist der Grundgranit durchsetzt von vereinzelten Porphyrgängen (No. 22 und 22*). Dieselben häufen sich nach dem Südende des Massivs zu in einer Weise, dass der Porphyr das vorherrschende Gestein wird.

In Bezug auf Bohrarbeit wird diese mittlere Sektion die schwierigste sein. Der Gasterengranit könnte hinsichtlich des Widerstandes, den er dem Bohrer entgegensetzt, etwa verglichen werden mit dem Gneiss-

---

Anmerkung. Nach den uns vorliegenden Profilen des kürzeren Tunnels würde die zu erstellende Ausweichsstation in die Nähe des Granitkontaktes zu liegen kommen. Wir machen hier aufmerksam auf die teilweise schlechte Beschaffenheit der Liasgesteine und die voraussichtlich beträchtlichen Wasserinfiltrationen an jener Stelle.

granit der Schöllenen; eher ist er noch zäher, wird aber bessere Sprengresultate ergeben. Zur Vergleichung könnten nachstehende Bohrresultate beigezogen werden:

Im Gneissgranit des Gotthard:

Gneissgranit	4 m	pro Stunde	2,5 m	täglich. Fortschritt im Richtstollen					6 Maschinen (System Ferroux)
„	4,4 m	„ „	2,8 m	„	„	„	„		
„	5 m	„ „	3 m	„	„	„	„		
„	4,6 m	„ „	3 m	„	„	„	„		

Im zähen Antigoriogneiss des Simplon:

4 m täglich im Richtstollen (Brandt'sche Bohrmaschine).

Dagegen werden die ausserordentlich harten Porphyrgänge die Fortschritte in der Bohrung eher ungünstig beeinflussen, wenn auch die Sprengwirkung eine sehr gute sein wird.

Für den regelmässigen Fortgang der Arbeiten sodann ist die sehr gleichmässige Beschaffenheit des Gesteins von grossem Vorteil.

Trotz des vorzüglichen Gesteinsmaterials in dieser Sektion glauben wir doch eine Ausmauerung befürworten zu sollen, hauptsächlich im Hinblick auf die grossen Überhöhungen (1100—1640 m). Spannungen im Gestein, und die sind ohne Zweifel auch im Granitkern vorhanden, lösen sich mit der Zeit aus. Auch in ganz kompaktem Fels bilden sich dann Spaltfugen, was seine Zerbröckelung zur Folge hat und eine nachträgliche Auskleidung der Tunnelröhre doch notwendig macht. Daher wird z. B. der Simplontunnel vollständig ausgemauert, obschon der Tunnel auf der Südseite im Antigoriogneiss liegt, der an Festigkeit unserem Gasterengranit nur wenig nachgeben dürfte.

Übrigens wird gerade der Gasterengranit ein ausgezeichnetes Konstruktionsmaterial liefern. Zwar kann das im Tunnel gesprengte Gestein zu Bauzwecken nicht oder nur in geringem Masse verwendet werden, weil die Sprengung vollständige Zertümmerung im Gefolge hat.

Dagegen finden sich im Hintergrund des Gasterenthales genügend Stellen, wo der Granit mit Leichtigkeit gebrochen werden kann. Hier soll auch auf den bequemen Abbau der harten, eocänen Sandsteine des Fisistocks hingewiesen sein.

Auf der Nordseite wird der Tunnel auf den Granit stossen ungefähr bei Km 23. Die Grenze zwischen Sedimentdecke und Grundgebirge ist jedoch kaum genau zu bestimmen, da die nächste sichtbare Kontaktstelle bereits 1 Km von der Tunnelaxe entfernt liegt. Immer-

hin sind die Anhaltspunkte doch der Art, dass der Fehler nicht mehr als 200 m betragen sollte.

Schwieriger dagegen ist die Bestimmung der Südgrenze des Granitstockes. Jedenfalls liegt sie zwischen Km 28 und 29. Nehmen wir 28.7, so erhalten wir als Länge der mittleren Sektion 5.6 Km

c. Südliche Sektion.

Die südliche Sektion beginnt bei Km 28.7 circa, wo der Tunnel in die Zone der krystallinen Schiefer eintritt und darin verbleibt bis zu seiner Ausmündung ins Lötschthal.

Die Zone der krystallinen Schiefer ist ausgezeichnet durch die Mannigfaltigkeit ihrer Gesteine: Sericitische Gneisse und Schiefer Glimmerschiefer, grüne Schiefer mit Einlagerungen von Topfstein und Amphiboliten. Im südlichen Teil der Sektion erscheinen dann granitische und aplitische Gänge, die in grosser Zahl die Schiefer durchziehen. Eine petrographische Beschreibung der einzelnen Gesteine ist im Hinblick auf rein technische Fragen überflüssig. Besser als jede Beschreibung giebt unsere Handstücksammlung No. 23—42 Auskunft.

Der beständige Wechsel im Aussehen und in der Verteilung der verschiedenen Gesteine macht es unmöglich, für jedes einzelne derselben Ausdehnung und Lage in der Tunnelaxe festzustellen. Das hat übrigens gar keine grosse Bedeutung, weil die ganze Zone in technischer Beziehung doch eine mehr einheitliche darstellt. Doch konnten die Zonen der grünen Schiefer mit Amphibolit- und Topfsteineinlagerungen ungefähr festgestellt werden.

Die ganze Zone der krystallinen Schiefer streicht nördlich nach dem Hintergrund des Lötschthales; die Tunnelaxe steht also so ziemlich senkrecht zur Streichrichtung.

Während die Schichten oben an den Gräten flacher liegen, nimmt ihr Fallwinkel nach der Tiefe mehr und mehr zu, bis sie nahezu die Verticale erreichen. (Lonzabrücke 80°, Schlucht des Ferdenbachs 90°.)

Diese steile Schichtstellung ist für den Tunnelbau von grossem Vorteil. Der Schichtverband ist dabei ein fester und es sind so weniger starke Gewölbe notwendig, als bei mehr flacher Lagerung. Bezüglich der Mauerung verweisen wir auf das für die mittlere Sektion gesagte.

Was die Bohrung anbetrifft, so kann diese Sektion in Vergleich gebracht werden mit dem Stück des Gotthardtunnels unter dem Urserenthal, also mit den Gesteinen der Urserenmulde.

Zu den weichsten Gesteinen gehören die Glimmerschiefer, die Sericit- und die grünen Schiefer. (Vergl. No. 118, 81, 18, 12 Serie N. der Gotthardhandstücke, mit den nachstehend zusammengestellten Bohrfortschritten):

No. 118 Glimmerschiefer 8,98 m pro Stunde 4,49 m tägl. Fortschritt im Richtstollen
No. 12 Sericitschiefer 8,93 m „ „ 5,20 m „ „ „ „
(6 Maschinen System Ferroux.)

Geringere Bohrresultate werden sich von Km 32 an ergeben infolge der dort auftretenden granitischen und aplitischen Gänge.

Die zähesten Gesteine der ganzen Sektion sind ohne Zweifel die Amphibolite. Linsen- oder streifenförmige Amphiboliteinlagerungen von geringer Mächtigkeit sind zu erwarten zwischen Km 30 und 30.5 (Handstücke 28 und 33); grüne Schiefer zwischen Km 29.5 und 30.

Die Länge dieser Sektion mag 3,5—3,8 km betragen.

II. Der längere Tunnel 18.5 Km.

Für den längeren Tunnel ergeben sich insofern einige Abweichungen, als derselbe auf der Nordseite 168 m tiefer ins Gebirge eintritt, wodurch die Länge der Sektionen eine andere wird. Zugleich schneidet er eine Anzahl Gebirgsglieder, die der kürzere nicht mehr berührt. Sonst sind die Verhältnisse, soweit sie den anstehenden Fels betreffen, dieselben. Als neu kommt hinzu die in Schuttausfüllung zu erstellende Strecke Mitholz-Kandersteg. Wir erhalten also für den längeren Lötschbergtunnel folgende Gliederung:

1. Das Schuttgebiet von Kandersteg;
2. Die nördliche Sektion — im Kalk;
3. Die mittlere Sektion — im Granit;
4. Die südliche Sektion — in den krystall. Schiefern.

1. Das Schuttgebiet von Kandersteg.

Vom Nordportal bis zu Km 13.4 circa. Über die Thalausfüllung von Kandersteg ist im vorigen Kapitel eingehend berichtet worden.[1])

[1]) Da es für den Tunnelbau ziemlich gleichgültig sein kann, ob man die Schuttmassen am Bühlstutz als Moränen- oder als Bergsturzmaterial betrachtet, weil die beiden hier in technischer Beziehung keine grossen Verschiedenheiten zeigen, so verzichtet der eine Experte, der von der Bergsturznatur der ganzen Ablagerung überzeugt ist (Sturz vom Fisistock), auf eine ausführliche Begründung seines Standpunktes.

Sei es Moräne oder sei es Bergsturz, so viel ist sicher, dass man es in diesem ersten Stück unter allen Umständen mit Schuttgebirge zu thun haben wird, in welchem regelmässige mechanische Bohrung ausgeschlossen ist, und dass das Tunnelstück unter der Thalsohle von Kandersteg zu den schwierigsten gehört.

2. Die nördliche Sektion.

Von Km. 13.4 bis Km 17 circa trifft man mit einer einzigen Ausnahme die nämlichen Gesteine an, wie im vorigen Projekt. Vor dem Urgonkalk nämlich, bei Km 13.4, steht möglicherweise Eocän an und zwar ein sehr harter Sandstein.

3. Die mittlere Sektion.

7 Km lang, bis Km 24 circa, muss im Gasterengranit gebohrt werden.

4. Die südliche Sektion.

5½ Km, in den krystallinen Schiefern, die im vorigen Kapitel bereits besprochen wurden. Hinzuzufügen sind:

Bei Km 28 eine Zone grüner Schiefer mit einem Topfsteinlager. Gegen das Südportal hin bei Km 29.1 eine Amphibolitzone, die vom «roten Berg» auf das rechte Lonzaufer hinüber streicht und einen Bleiglanzgang enthält, der wahrscheinlich durch den Tunnel angeschnitten wird.

B. Wildstrubel-Tunnel.

Die beiden Wildstrubeltunnels erreichen das Grundgebirge und die ältesten am Lötschberg vorkommenden Sedimente der Trias nicht mehr. Die zu durchbohrenden Schichten setzen sich ausschliesslich zusammen aus Kalken, Schiefern und Sandsteinen. Was für ein Betrag freilich auf jede dieser Gesteinsarten fällt, lässt sich nicht zum voraus bestimmen; für das Innere des Wildstrubelklotzes sind wir auf die Hypothese angewiesen.

Sicher ist nur, dass der Tunnel auf der Nordseite auf die dunkeln thonigen, mit 30° Süd fallenden Flyschschiefer trifft, in welchen die Kalkklippe des Laubhorns steckt; auf der Südseite vorerst auf schwarze Schiefer und Sandsteine des Lias, dann auf die Kalkbänke des oberen und mittleren Jura. Möglicherweise wird man auf der grössten Tunnelstrecke eocäne Gesteine, Flysch, anbohren.

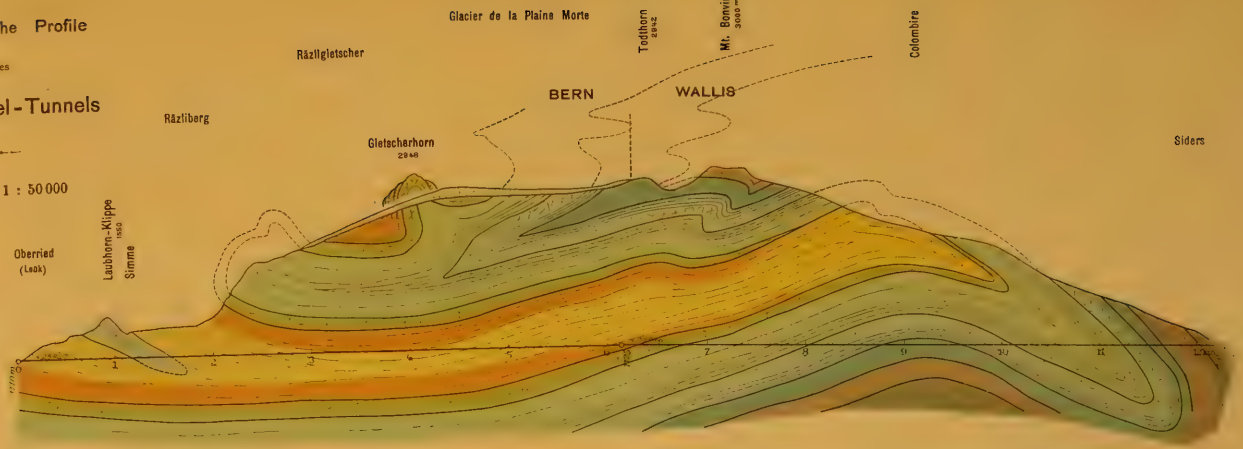
Die Bohrung in den durchweg weicheren Gesteinen, die auf grosse Strecken im grossen und ganzen dieselbe Beschaffenheit haben, wird eine leichte sein. Dagegen wird die Sprengwirkung durch die mehr flache Schichtenlage ungünstig beeinflusst.

Geologische Profile

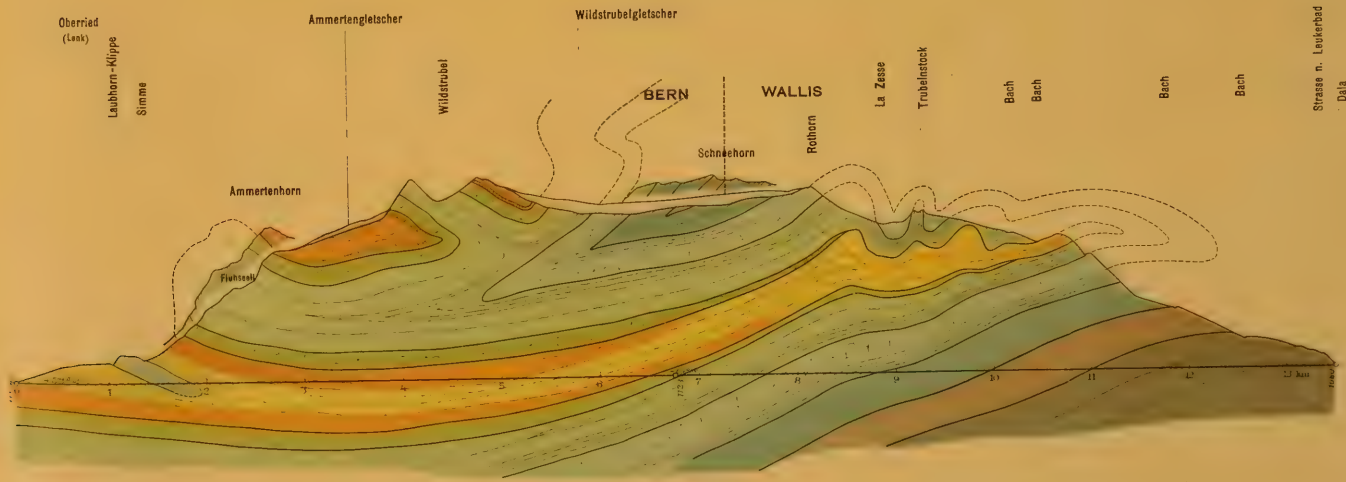
des

Wildstrubel-Tunnels

Massstab 1 : 50 000



Richtung: Oberried–Siders.



Richtung: Oberried–Leuk.

Ausdrücklich soll hervorgehoben werden, dass der Gebirgsdruck im Innern des Wildstrubelmassivs ein enormer sein muss, und falls dort wirklich die weichen Flyschgesteine anstehen, die stärksten Gewölbekonstruktionen notwendig werden.

IV. Wasser-Verhältnisse.

Lötschberg.

1. Kürzerer Tunnel. 12.9 Km.

Die Wechsellagerung wasserdichter und wasserdurchlässiger Schichten wird besonders in der Sektion *a* zu mehreren Wasserzuflüssen Veranlassung geben. Nahe beim Nordeingang wird der eine oder andere der Wasserstränge der am Thalrand von Kandersteg entspringenden Quellen durchschnitten werden. Das Wasser wird aus dem dunklen Urgonkalk heraustreten und bei der Bohrung wenig hinderlich sein, indem dasselbe meist seitlich oder in der Tunnelsohle zufliessen wird und ausgenommen beim Eintritt in die Neocomkalke (Km 20) wenig Wasserzufluss von oben zu befürchten ist.

Von Km 20—21 durch die oft schiefrigen Hauterivien- und Valangienschichten wird beständiger, aber schwacher und mit dem Fortschritt abnehmender Zufluss von oben stattfinden. Beim Eintritt in den rissigen Hochgebirgskalk, ungefähr bei km 21, sind bedeutende Wasserzuflüsse von oben zu befürchten, entsprechend dem Vorhandensein von starken Quellen, welche am nördlichen Thalrand des Gasterenbodens in 1360 m Meereshöhe austreten, ungefähr unterhalb der Stelle, wo der Hochgebirgskalk den Thalboden durchquert. Das Anschneiden des letzteren, nämlich des Kalkes, wird sehr wahrscheinlich dieses Quellenbassin anzapfen und die ganze Wassermenge nach und nach, im schlimmsten Falle auf einmal, zum Abfluss in den Tunnel bringen. Dabei wird der anfängliche Zufluss bedeutend grösser sein, indem sich der Wasserspiegel senken muss, bis das Reservoir vollständig entleert ist. Da es sich um eine sichtbare Wassermenge von ungefähr 200 SL handelt, wahrscheinlich aber viel mehr Wasser durch den Alluvialboden ausfliesst, so muss man sich auf ein anfänglich sehr bedeutendes Wasservolumen gefasst machen, 3—400 SL, im Frühjahr und Sommer mehr, als im Winter. Später mag die Wassermenge auf 250 SL herabsinken. Es ist wiederum möglich, dass durch sehr

günstige Verhältnisse nur ein kleiner Teil des Wassers abgezapft wird. Obige Ziffern beziehen sich auf den Fall, dass das ganze Quellenbassin angeschnitten wird.

Die Unterführung unter den Gasterenboden hat, trotz der geringen Überlagerung, nicht zu befürchten, auf Trümmergestein zu stossen. Die Auffüllung beträgt höchstens 60—70 m. Der Tunnel wird also sicher noch von mindestens 100 m Felsgestein überhöht sein. Wasserzufluss ist auf der Nordseite, im Hochgebirgskalk zu befürchten. Im Dogger, sowie im obern und untern Lias wird häufiges, aber schwaches Wasserträufeln stattfinden. Nur im kompakten mittleren Lias werden bedeutende Wasserzuflüsse zu erwarten sein.

Sektion *b*. Es ist kaum wahrscheinlich, dass der Eintritt in das Gasterengranitmassiv mit bedeutendem Wasserzufluss zusammenfallen wird. Der Granit ist, obschon zerklüftet, nur oberflächlich als Wasser durchlässiges Gestein zu bezeichnen. Die unbedeutende Löslichkeit seiner Substanz verhindert tiefgehende Erweiterungen der Klüfte; somit dringen Tagewasser gewöhnlich nur wenig tief in Granitgestein ein. Da die Überhöhung des Tunnels im abgedeckten Teil des Granitmassivs 1200—1400 m beträgt, so ist der Wasserzufluss bis in solche Tiefe fast vollständig ausgeschlossen.

Sektion *c*. Die steilstehenden krystallinen Schiefer werden, dank ihrer Parallelabsonderung, welche die Wasserführung sehr erleichtert, zuerst sehr schwachen Wassermengen tropfenweisen Zutritt gestatten. Die Menge dieses Sickerwassers wird mit abnehmender Überhöhung des Gebirgs zunehmen und besonders in der Nähe des Südportals in den sehr zerklüfteten Aplit- und Mikrogranitgängen kleinere Quellen bilden. Grössere Quellen werden in der Strecke *c* keine zu erwarten sein.

2. Langer Tunnel.

Hier ist besonders die Unterfahrung der Schuttauffüllung des Thalbodens von Kandersteg von grosser Bedeutung. Es ist erstens beständiger Zufluss von Tagewasser zu befürchten, im Falle, dass das Schuttmaterial aus grossen Blöcken (Bergsturz oder Blockmoräne) besteht. Bei lehmig-sandiger oder kiesig-sandiger Grundmoräne wäre dies weniger der Fall. Die Thatsache, dass auf beiden Seiten des Thalbodens, zwischen Kandersteg und Eggenschwand, bedeutende Quellen entspringen, mindestens 500 SL, deutet mit Sicherheit darauf-

hin, dass an der Randzone der Schuttmasse, vor dem Eintritt in das feste Gestein (Km 13.3—13.4), der rechtsseitige Quellenstrang abgeschnitten wird. Da derselbe der ergiebigste ist, so mag die Wassermenge auf mindestens 300 SL angesetzt werden; am Anfang bis zur Entleerung des Bassins natürlich viel mehr.

Sektion 2 wird sich verhalten ganz wie beim kurzen Tunneltracé. Bei Km 14.6 bedeutende Wassermenge aus dem Malm. Von Km 15 bis 17 wenige Zuflüsse oder nur ganz schwaches Schweissen des Gesteins.

Die Sektion 3 wird sich hier wegen der nur schwachen Überhöhung (430 m) durch den Gasterengranit unterhalb Brandhubel etwas anders verhalten, als der entsprechende Teil des kürzeren Projekts. Bei Km 18 wird möglicherweise Tagewasser durch Spalten eindringen. Die Sickerwasser werden aber mit der Überhöhung abnehmen und erst in den krystallinen Schiefern, Sektion 4, wieder etwas zunehmen, um dann mit der allmähligen Abdachung von Km 17 an sich mehr und mehr zu vermehren, ohne aber ein bedeutendes Volumen zu erreichen.

Wildstrubel.

Die sehr ähnlichen Verhältnisse beider Tunnelprojekte erlauben uns, dieselben zusammen zu besprechen. Die Strecke von Km 0—6 wird im allgemeinen nur diffuse, tropfenweise Sickerwässer aufweisen, besonders im Norden beim Durchfahren der steilstehenden Flyschschiefer. Nur beim Durchstich der Laubhornklippe, insofern dieselbe bis auf das Tunnelniveau herabreicht, wird ein grösseres Wasservolumen zu erwarten sein. Der südliche Tunnelteil in den Kreide- und Juraschichten wird bei Km 6.5 und besonders bei Km 8—8.5 bedeutende Wassermengen antreffen; beim Tracé Oberried-Leuk mehr, als beim Tracé Oberried-Siders. Bei ersterem werden höchstens die Liassandsteine in der Nähe des Südportals Wasserzuflüsse gestatten; bei letzterem die Malmkalke bei Km 11.5.

V. Temperatur-Verhältnisse.

Die Schwierigkeiten, die sich der Temperaturbestimmung für einen Punkt innerhalb eines Gebirgsstockes entgegenstellen, sind bekannt. Die Gesteinswärme hängt nicht nur ab von der vertikalen

Tiefe, resp. der kürzesten Entfernung zur Oberfläche; sie wird vielmehr bedingt durch das Gesamtrelief der überlagernden Gebirgsmasse und im einzelnen manigfach beeinflusst durch die Natur des Gesteins, seine Struktur, Wasserführung u. s. w.

Aus dem Grunde ist es auch unmöglich, für die Temperaturberechnungen exakte Formeln aufzustellen, um so weniger, als wir über die Temperatur der Bodenoberfläche in verschiedenen Höhen relativ spärliche Beobachtungen besitzen.

Trotzdem wurden für die einzelnen Projekte die von Stapf aufgestellten Formeln in Anwendung gebracht:

I. $T = t + 0{,}020679\,h$ (h = vertikale Überhöhung)
(n = kürzester Abstand zur Oberfläche)

II. $T = t + 0{,}02159\,n$ (t = Bodentemperatur)

Da die nach obigen Formeln erhaltenen Resultate aber bis auf $\pm$ 5° unsicher sein können, so schien es wünschenswert, auch die von *Heim* angewandte Methode des Vergleichens mit einem bekannten Temperaturprofil (Gotthard) zu benutzen, eine Methode, die erlaubt Temperaturen bis auf $\pm$ 2° richtig zu schätzen. Die letztere Art der Vorausbestimmung diente zur Herstellung der Temperaturprofile; doch werden wir vergleichsweise die nach Stapf erhaltenen Werte ebenfalls beisetzen.

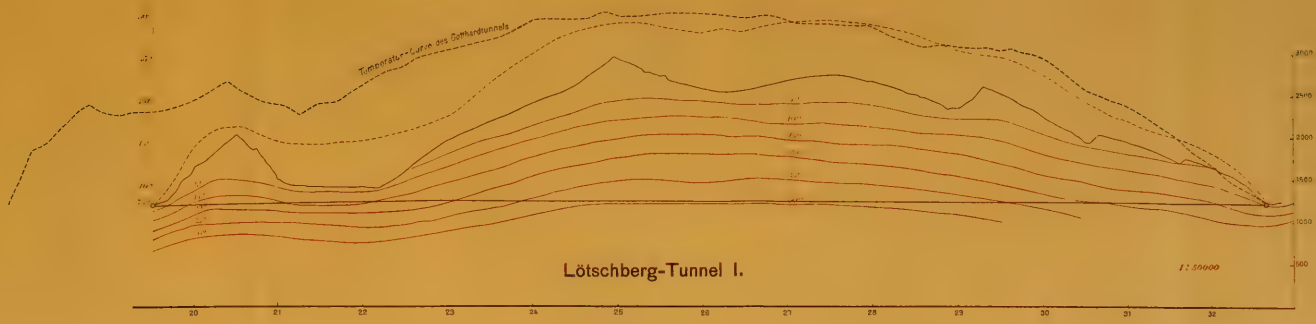
A. Der Temperaturverlauf im Lötschberg.

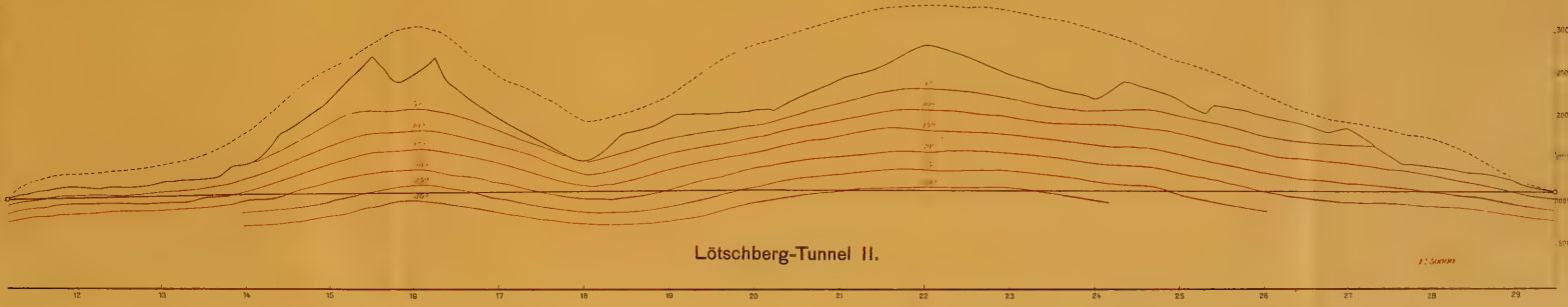
Das Lötschberggebiet weist in seinem äussern Relief manche Ähnlichkeit mit dem Gotthardgebiet auf: ähnliche Gipfelhöhen, Einschneiden eines tiefen, bereits im Streichen verlaufenden Thales in den Gebirgskörper mit fast gleicher Thalsohlenhöhe u. s. w.

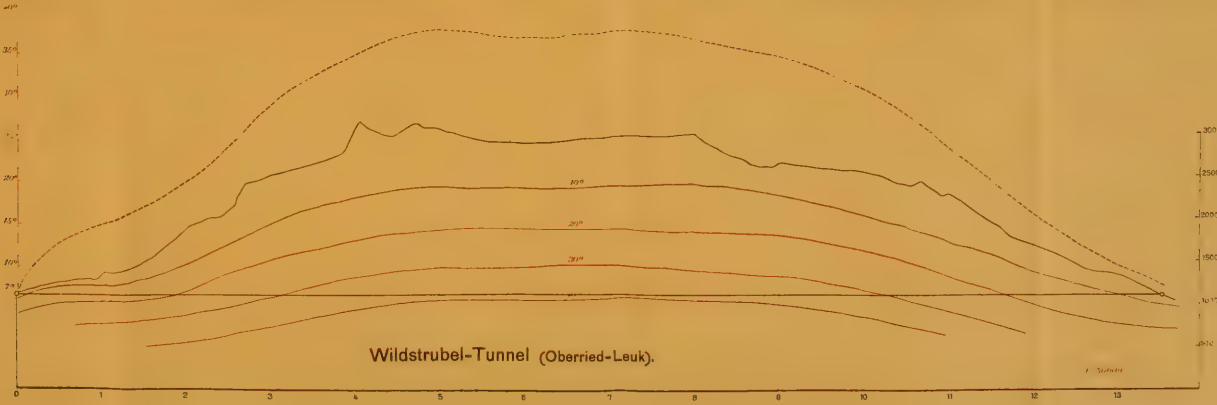
Aus dem Grunde ist ein Zunehmen der Erdwärme analog demjenigen des Gotthards sehr wahrscheinlich.

Für das höhere kürzere Lötschbergprojekt tritt dann als günstiger Umstand noch hinzu, dass die Tunnelaxe bei 100 m höher liegt als am Gotthard. Im übrigen ergeben sich die für dieses Projekt voraussichtlich zu erwartenden Temperaturen aus folgender Tabelle:

Längenprofile mit dem voraussichtlichen Verlauf der Geoisothermen.







Km	Berechnet nach I.	II.	durch Vergleichung.
Nord-Portal	7,5°	7,5°	7,5°
20	15°	13°	14°
21	11°	10,5°	15°
22	10°	10°	15,4°
23	18°	16°	18°
24	25,5°	25,8°	25°
25	34°	30°	29,5°
26	28°	28°	29°
27	30°	30,5°	29°
28	29,7°	29°	28°
29	25°	25°	26°
30	23°	22°	22°
31	18°	18°	18°
32	13°	13°	14°
Süd-Portal	8°	8°	8°

Wir werden daher kaum fehlgehen, wenn wir die Maximaltemperatur bei 30° annehmen, und eine Vergleichung ergiebt, dass man beim Bau des kürzern Lötschbergtunnels mit ähnlichen Wärmeverhältnissen zu rechnen haben wird, wie es am Gotthard der Fall war.

Dasselbe gilt in noch höherem Masse auch für das tiefere Lötschbergprojekt. Doch wird hier die Maximaltemperatur der orographischen Verhältnisse wegen eine etwas höhere sein, 31° jedoch kaum übersteigen und überdies nur auf eine kurze Strecke. Die zu erwartenden Temperaturen sind folgende:

Km	Berechnet nach I.	II.	Durch Vergleichung.
Nord-Portal	8°	8°	8°
12	10,9°	10,9°	11°
13	11°	11°	12°
14	14,5°	13°	16°
15	26°	23°	23°
16	30°	30°	28°
17	21°	20,5°	22°
18	14°	13°	17°

Km	Berechnet nach I.	Berechnet nach II.	durch Vergleichung.
19	21°	19°	20°
20	22°	23°	26°
21	29°	26°	29°
22	36°	35°	31°
23	30°	30°	30,5°
24	25°	25°	27°
25	24°	23°	24°
26	22°	21°	20°
27	19°	17°	17°
28	13°	12°	15°
29	10°	10,5°	14°
Süd-Portal	8°	8°	8°

B. Der Temperaturverlauf im Wildstrubel.

Das Wildstrubelgebiet stellt eine einzige klotzige, wenig gegliederte Masse dar, mit mauerartig aus den Thälern emporstarrenden Abstürzen, gekrönt von einem breiten Plateau, aus dem nur wenige höhere Spitzen hervorragen.

In einem Gebirgsstock mit derartigen Reliefformen wird natürlicherweise der Verlauf der Geoisothermen ein wesentlich anderer sein, als am Gotthard resp. Lötschberg und für die Tunnelprojekte sind bedeutend höhere Temperaturen vorauszusehen. Während am Lötschberg die grösste Vertikaldistanz für den tieferen Tunnel 1700 m, für den höheren 1644 m beträgt und zwar nur auf einer ganz kurzen Strecke, wird sie im Projekt Oberried-Leuk z. B. 1950 m und überschreitet dort die Maximalüberhöhung des Lötschberges auf einer Länge von mehr als 4 Km. So erhalten wir denn im Leukertunnel höhere Temperaturen als 35° auf einer Strecke von 5 Km und für die innersten 3 Km steigt die Wärme sogar auf **37—38°** (siehe die folgende Zusammenstellung).

Km.	Berechnet nach I.	II.	Durch Vergleichung.
Nord-Portal	7°	7°	7°
1	11°	11°	15°
2	19°	17°	20°
3	30°	28°	29°
4	39°	36°	35°
5	40°	40°	38°
6	36°	38°	37°
7	37°	38°	38°
8	39°	38°	37°
9	33°	33°	35°
10	31°	32°	31°
11	27°	23°	24°
12	17°	17°	16°
13	12°	12°	16°
Süd-Portal	8°	8°	8°

Etwas günstiger als das vorige Projekt stellt sich der Tunnel Oberried-Siders. Immerhin erhalten wir auch dort Temperaturen von über 30° auf einer Länge von 4,5 Km; 35° zwischen Km 5 und 7.

Aus den vorhergehenden Ausführungen ergiebt sich, soweit die Wärmeverhältnisse in Betracht kommen, dass die Lötschbergprojekte den Wildstrubelprojekten weit überlegen sind. Die beiden Lötschbergprojekte stellen sich so ziemlich in gleiche Linie. Eine Verschiebung der Tunnelaxe im Lötschberggebiet innerhalb der beiden Tracélinien wird an diesem Verhältnisse wenig ändern.

VI. Geologische Begutachtung einer allfälligen Verschiebung der noch nicht bestimmten Tunnelaxe durch den Lötschberg innerhalb eines Streifens von ½—1 Km Breite rechts und links von der vorläufig angenommenen Axe.

Eine Verschiebung der kürzeren Tunnelaxe nach Westen halten wir entschieden für unvorteilhaft. Erstens hätte sie eine Unterfahrung des Gasterenbodens unter ganz schiefem Winkel zur Folge, wodurch jene Strecke verlängert, die Überhöhung des Tunnels aber

auf kaum 150 m reduziert und die Mächtigkeit des Felsbodens über dem Tunnel kaum mehr als 50 m betragen würde. Dabei ist neben der Zunahme des Tagewassers zu befürchten, ja sicher anzunehmen, dass die ganze Wassermenge der Quellen am Nordrand des Gasterenbodens abgeleitet werde.

Sodann käme der Tunnel noch näher als es jetzt der Fall ist, in die Nähe der gewaltigen Kalkmasse des Balmhorns-Ferdenrothorns, wodurch die Temperaturverhältnisse sich bedeutend ungünstiger gestalten müssten.

Eine Verschiebung der Axe gegen Osten zu könnte nur den Vorteil haben, dass der Wasserzudrang von der Nordseite des Gasterenthales ein weniger grosser würde. Bezüglich der Temperatur bleiben sich die Verhältnisse so ziemlich gleich. Dagegen wird der Tunnel länger und zwar hauptsächlich die mittlere Granitsektion b.

Wir betrachten daher das eingezeichnete kürzere Tracé vom geologischen Gesichtspunkt aus als das richtige.

Bei einer Verschiebung der längeren Tunnelaxe kann es sich nur um eine solche in der Richtung nach Osten handeln, d. h. Verlegung des nördlichen Tunneleingangs in das Felsgestell der Birre durch eine gekrümmte Einfahrt. Eine derartige Verlegung hätte den Vorteil, dass der Tunnel dem schwierigen Teilstück unter dem Kanderstegboden ausweichen könnte.

VII. Vergleichung der verschiedenen Tunnelprojekte.

Nach eingehender Vergleichung vom geologischen Standpunkt aus kommen wir zu folgenden Schlüssen:

Lötschbergtunnel. Vorteile desselben:

1. Einheitlichkeit und gleichmässige Beschaffenheit der Gesteine auf lange Strecken, hauptsächlich im Gasterengranit.
2. Allgemein steile Stellung der krystallinen Schiefer und ihr Streichen senkrecht zur Tunnelaxe.
3. Verhältnismässig geringe Temperatur, auch beim tiefen Tracé.
4. Gutes Baumaterial, sowohl auf der Nord- als auf der Südseite.

Aus dem einzigen Vorteil des langen Tracés, seiner tiefen Lage, erwachsen folgende Nachteile:

1. Bedeutende Länge.

2. Schwierigèr Tunnelbau in der ersten Sektion auf der Nordseite, welcher höchstens durch eine bogenförmige Tunneleinfahrt mit Verlegung der gradlinigen Tunnelaxe gegen Osten umgangen werden könnte.

Wildstrubeltunnel.

Vorteile:

1. Leichte Nord- und Südzufahrt. Dieser Vorteil ist besonders den Lötschberg-Projekten gegenüber hervorzuheben, indem hier auf der Südseite der Tunnel in ein von Lawinen und Bergsturz viel bedrohtes Seitenthal ausmündet.
2. Leichtere Bohrung in ziemlich gleichmässig beschaffenem Gestein.
3. Einfachere Wasserverhältnisse.

Nachteile:

1. Starker Gebirgsdruck. Daher Notwendigkeit einer durchgehend sehr starken Ausmauerung.
2. Hohe Temperaturen auf lange Strecken.
3. Geringe Sprengwirkung in den flachliegenden Schichten.
4. Schwer zu beschaffendes, gutes Baumaterial auf der Südseite.

Nach rein geologischen Rücksichten kommen wir dazu, dem kürzeren Lötschbergprojekt den Vorzug vor den andern Tunnelprojekten zu geben.

Bern, den 17. Februar 1900.

Die Experten: *v. Fellenberg.*

Kissling.

Schardt.

Theophil Studer.

Ueber Hunde aus den Crannoges von Irland.

Der Vortragende hatte schon früher Gelegenheit, in den reichen prähistorischen Sammlungen des irischen Nationalmuseums in Dublin die Reste von Hunden zu untersuchen, welche zum Teil in den Kulturablagerungen der prähistorischen Seenwohnungen gefunden worden waren. Seither sind ihm durch die Güte des Direktors der Sammlungen, Herrn Dr. Scharff, eine Anzahl vorzüglicher Gypsabgüsse jener Hundeschädel mitgeteilt worden, welche erlauben, eine genaue Vergleichung derselben mit den in unserer Sammlung befindlichen prähistorischen und recenten Hundeschädeln anzustellen.

Zunächst liegen drei Abgüsse von Schädeln aus dem Crannoge von Dunshaughlin, County of Meath, vor. Zwei grosse Schädel gehören, nach Etiquette, der berühmten Rasse des irischen Wolfshundes, Irish Wulfsdog. Der eine hat eine Basilarlänge von 210, der andere von 217 mm. Der Schädel ist im allgemeinen schmal, der Gesichtsteil nicht scharf abgesetzt, nach vorn sich verjüngend, die Cristae parietales bei beiden sehr hoch, der Hinterhauptthöcker stark nach hinten ausgezogen, die Parietalgegend wenig gewölbt, so dass der Schädel fast dachförmig von der Parietalcrista nach der Ohrgegend abfällt. Der Gesichtsteil ist vor dem Jochbogenansatz noch breit, vor dem foram. infraorbitale verjüngt er sich stark und verschmälert sich nach vorn bis zur Schnauzenspitze. Im Profil ist die Gegend der Nasenwurzel nicht eingesenkt, der Schädel fällt von der Stirnhöhe sanft und gleichmässig nach der Spitze der langen Nasenbeine ab; nur bei dem grösseren Exemplar zeigt sich eine Einsenkung in der Mitte der Nasenbeine. Bei demselben ist auch die Schnauze vorn stumpfer und breiter, der ganze Schädel etwas plumper als beim anderen. Die Stirn ist breit, bei dem grösseren in der Medianlinie stark vertieft, weniger bei dem kleineren Exemplar.

Im allgemeinen, bei dem einen bis ins Detail, stimmen die

Schädel mit dem des irischen Wolfshundes im brit. Museum in London überein, ebenso mit einem Wolfshundschädel unseres Museums aus der Zucht des Herrn Walker in St. Moritz. Nach dem letzteren Exemplar darf man sagen, dass die alte Rasse sich in der Walkerschen Zucht noch gut erhalten hat.

Von den älteren Schriftstellern, die sich mit dem irischen Wolfshund befassen, wird derselbe stets in seinem Habitus mit einem kräftigen Windhund verglichen und namentlich auf seine Verwandtschaft mit dem Scotsch Deerhound hingewiesen.[1]) Schädel von solchen, welche mir aus den Zuchten von Herrn Staub in Zürich vorliegen, bestätigen auch die nahe Verwandtschaft beider Formen, nur zeigt der Scotsch Deerhound, ein gracileres Gepräge. Die Schnauze ist länger und schmaler, die Jochbogen sind weniger ausgelegt, die Crista sagittalis ist niedriger und die Parietalgegend mehr gewölbt.

Beide Formen sind vereinigt in dem Canis Leineri aus dem Pfahlbau von Bodman am Ueberlingersee, welcher der jüngeren Steinzeit der Pfahlbauten angehört.[2]) Hier zeigt der Schnauzenteil des Schädels und das Verhältnis der Jochbogen ganz den Bau des Wolfshundes, während der Hirnschädel mit seiner schwächeren Scheitelcrista und der gut gewölbten Parietalregion den Typus des Deerhounds wiederholt.

Wir dürfen also diesen grossen Rassen, die im Altertum und bis ins Mittelalter als kräftige Jagdhunde eine grosse Rolle spielen, einen mitteleuropäischen Ursprung zuweisen. Namentlich bei den keltischen Völkerschaften scheinen sie nach Ueberlieferung der Alten und nach Funden von bildlichen und plastischen Darstellungen in den römisch-gallischen Ueberresten eine grosse Rolle gespielt zu haben.[3])

Der dritte Schädel, mit 167 mm Basilarlänge, zeigt einen von dem vorigen sehr verschiedenen Habitus. Er gehörte einem mittelgrossen Hunde an, etwa von der Grösse eines kräftigen Spitzers.

---

[1]) S. Graham, The irish Wolfhound by Capt. Graham, Rednock, Durzley 1879 und Walker, Der irische Wolfshund. Schweiz. Hundestammbuch. Bd. VI, 1896, p. 64.

[2]) S. Studer, Zwei grosse Hunderassen aus der Steinzeit der Pfahlbauten. Schweiz. Hundestammbuch V, 1893, und Beiträge zur Geschichte unserer Hunderassen. Naturwissenschaftliche Wochenschrift XII, 1897, Nr. 28.

[3]) S. Studer Th., Die Hunde der gallischen Helvetier. Blätter für Kynologie. II. Jahrg., Nr. 17, Zürich, August 1886, und Beiträge zur Kenntnis unserer Hunderassen etc.

Der Schnauzenteil ist stumpf und wenig verlängert und setzt sich an der Nasenwurzel durch eine Einsenkung von dem schön gewölbten Hirnschädel ab, auf dem eine mässig starke Crista parietalis entwickelt ist. Die Jochbogen sind stark ausgelegt. Der Gaumen ist breit, namentlich in der Gegend des Reisszahnes. Mit einem Worte, der Schädel gehört zu dem Typus des Pfahlbautenspitzes, Canis f. palustris, und zwar stimmt er überein mit den kräftigen grösseren Formen desselben, wie sie in der jüngeren Steinzeit gezüchtet wurden. Aehnliche Schädel liegen schon aus dem Pfahlbau von Lattrigen am Bielersee und aus den römischen Ruinen von Baden im Aargau vor.

Ein vierter Schädel eines mittelgrossen Hundes stammt aus dem Lough Gur in Limerick. Auch dieser zeigt die Spuren hohen Alters. Er ist braun gefärbt, wie die Schädel aus Torfmooren. Dieser Schädel stimmt in Grösse und Form am meisten mit dem Canis f. intermedius Woldrich[1]) aus der Bronzezeit überein, namentlich in dem Verhältnis des Hirnschädels zum Gesichtschädel, nur erscheint der Hirnschädel breiter und besser gewölbt, die Crista parietalis niedriger und die Schnauze etwas spitzer. Im Uebrigen steht er auch den Jagdhundformen, namentlich den Laufhunden, sehr nahe, so besonders dem helvetischen Laufhunde. Ich hatte schon an andern Orten hervorgehoben[2]), dass der C. intermedius der Bronzezeit in seinem Schädel die Charaktere der Jagdhunde zeige, und dass sich ihm der helvetische Jagdhund von La Tene und der bernische Laufhund nahe anschliessen, andrerseits zeigt er Beziehungen zum Schäferhund der Bronzezeit, dem Canis f. matris optimae Jeitteles.

Die Untersuchung der Hundereste aus prähistorischen Ablagerungen Irlands zeigt uns hiemit, dass dort die gleichen Urrassen der Hunde wie in Mitteleuropa vorkamen. Canis palustris, C. Leineri, C. intermedius bilden die Grundformen, aus denen sich die späteren Rassen entwickelt haben. Soweit wir demnach in Mittel- und Nord-Europa, von Irland bis zum Ladogasee, die prähistorischen Hundeformen kennen, lassen sich bis jetzt überall dieselben Urformen wieder erkennen, die schon in den schweizerischen und süddeutschen Pfahlbauten während der Stein- und Bronzezeit vorkamen.

---

[1]) Woldrich, Ueber einen neuen Haushund der Bronzezeit. Mitteilungen der anthropol. Gesellsch. in Wien. VII. Bd., Mai 1877, S. 61.

[2]) Studer, Th., Hunde der gallischen Helvetier und Beiträge zur Kenntnis der Hunderassen.

A. Droz-Farny.

Sur un théorème de Steiner.

Etude géométrique et développements.

Le journal de mathématiques belge, *Mathesis*, proposait en 1894, sous la signature de l'éminent géomètre E. Lemoine, la question 937 :

Soit un triangle ABC, et soient A_1 B_1 C_1 les symétriques de l'*orthocentre H*, par rapport aux milieux des hauteurs ; *A'*, *B'*, *C'*, les symétriques des pieds H_a H_b H_c des hauteurs *par rapport aux* milieux M_a, M_b, M_c des côtés BC, *AC*, *AB*.

1° Il y a une ellipse qui passe par les six points A, B, C, A' B' C'.

2° Elle est normale aux hauteurs en A_1 B_1 C_1.

3° Elle est tangente aux côtés en A' B' C'.

4° Elle a pour centre, le centre O du cercle circonscrit.

5° La somme de ses demi-axes égale le rayon R du cercle circonscrit.

6° Elle a pour équation : $\sum \alpha \sqrt{\frac{x}{\cos A}} = 0$

7° Si le cercle ABC et l'ellipse sont fixes, il y a une infinité de triangles ABC.

En 1895, j'ai donné dans *Mathesis*, page 258, une solution complètement synthétique de la question. En 1896, j'ai publié en outre dans le *Journal de Mathématiques spéciales* de Mr. de Longchamps p. 229—233 une solution géométrique de la question 501, proposée par Mr. le commandant E. Barisien et contenant quelques propriétés nouvelles de la figure.

Monsieur Barisien avait rencontré cette figure dans ses belles recherches sur les cercles de Chasles, ces cercles concentriques à une ellipse et de rayons respectifs a+b et a—b et qui jouissent de si nombreuses propriétés.

Les diverses propriétés retrouvées par MM. Lemoine et Barisien, avaient été étudiées autrefois par le grand géomètre bernois Steiner, qui les avait publiées dans le journal de Borchardt, volume 55, pages 356—378, sous le titre: Vermischte Sätze und Aufgaben. Voir

ses œuvres réunies, tome II, pages 671 et suivantes. De nombreuses propriétés nouvelles de cette figure ont été énoncées sans démonstrations par Mr. Böklen dans le *Journal de Hoffmann.*

Nous les rencontrerons dans la 2me partie de notre étude. Lire aussi la si intéressante étude historique de la question dans *Mathesis*, année 1898, page 61, due au savant géomètre Mr. Brocard (Colonel du génie à Bar-le-Duc).

Soient donc dans un triangle ABC, A′, B′, C′ les symétriques des pieds des hauteurs H_a H_b H_c par rapport aux milieux M_a M_b M_c des côtés BC, CA, AB et A_1 B_1 C_1 les symétriques de l'orthocentre H par rapport aux milieux des hauteurs.

On démontre aisément que les droites AA′, BB′, CC′ se coupent en un point Q, réciproque de l'orthocentre. Il existe donc une conique qui touche les côtés de ABC en A′ B′ C′.

Une proposition connue (Mémoire sur les transversales réciproques, *Annales de l'Ecole Normale*, 1866) due à Mr. de Longchamps prouve que *cette conique est l'enveloppe des transversales réciproques de celles qui tournent autour du point H.* (Voir note II).

Le centre de cette courbe, d'après un cas particulier d'un théorème de Newton, sur le lieu des centres des coniques ayant quatre tangentes communes, est à l'intersection des droites joignant M_a, M_b, M_c aux milieux N_a, N_b, N_c des droites AA′, BB′, CC′; ces droites étant parallèles aux hauteurs AH_a, BH_b, CH_c, *le centre de la conique E coïncide avec le centre O du cercle ABC.* (Voir 3 autres démonstrations dans la note I).

Comme $OM_a = \frac{AH_a}{2} = \frac{A_1H_a}{2}$, la droite A′O passe par A_1 et $A'O = OA_1$; *donc E passe par* A_1 B_1 C_1 *et les tangentes* en ces points sont parallèles aux tangentes menées en A′ B′ C′, autrement dit: *Les hauteurs du triangle ABC sont normales à la conique E.*

Les perpendiculaires élevées en A′, B′, C′ sur les côtés se coupent en un point N, symétrique de l'orthocentre par rapport à O. Ce point est évidemment l'orthocentre du triangle anticomplémentaire de ABC; donc:

Les hauteurs du triangle anticomplémentaire sont aussi normales à la conique E.

Menons par O et par A_1 des parallèles à BC; la première rencontre E en S et la seconde AC en P. On voit facilement que les

segments A′C et A_1 P déterminés par la tangente AC sur les tangentes parallèles A_1 P et A′C sont toujours de même sens; donc:

E est une ellipse.

Ensuite d'après un théorème connu $\overline{OS}^2 = \overline{A'C} \cdot \overline{A_1P}$.

Mais si l'on mène par H une parallèle à AC qui rencontre BC en D, l'égalité $AA_1 = HH_a$ entraine $A_1P = H_aD$, d'où

$$\overline{OS}^2 = A'C.A_1P = BH_a.\ H_aD = \overline{HH_a}^2$$

Donc les demi-diamètres de E parallèles aux côtés de ABC sont égaux aux segments inférieurs HH_a, HH_b, HH_c *des hauteurs.*

Nous connaissons maintenant deux demi-diamètres conjugués, OA′ et OS. Pour appliquer la construction de Chasles, nous élevons en A′ sur BC la perpendiculaire xA′y, de manière que $xA' = A'y = HH_a$, et que O et x soient de part et d'autre de BC, on aura:

$$Ox = a+b\,;\quad Oy = a-b$$

et les axes de E sont dirigés suivant les bissectrices de l'angle xOy. Comme $BH_a = A'C$, $A'x = HH_a$, on voit que x appartient à la circonférence ABC, donc $R = a+b$

$$\text{En outre } Oy = ON = (a-b) = OH$$
$$HN = 2\,(a-b).$$

Si, entre le rayon d'une circonférence et les axes d'une ellipse de même centre, on a la relation $R = a \pm b$, on peut inscrire à la circonférence une infinité de triangles qui sont en même temps circonscrits à l'ellipse et celle-ci est normale aux hauteurs de chacun des triangles. Cette proposition est rendue presque évidente par ce qui précède; on l'établit par un calcul facile, en prenant pour axes de coordonnées, les axes de l'ellipse et en considérant d'abord un triangle isoscèle dont les sommets ont pour coordonnées $(a+b\,;\ 0)$ et $(-a;\ \pm\sqrt{(a+b)^2 - a^2}\,)$, puis en appliquant le théorème de *Poncelet*.

Ces triangles jouissent des propriétés suivantes:

1° L'orthocentre décrit une circonférence de centre O et de rayon $(a-b)$; le centre de gravité décrit une circonférence de centre O et de rayon $\frac{a-b}{3}$; le centre du cercle d'Euler décrit une circonférence de centre O et de rayon $\frac{a-b}{2}$.

2° Le cercle d'Euler reste constamment tangent aux deux cercles décrits sur les axes de E, ce qui est évident puisque

$$a = \frac{1}{2}(R+OH) \text{ et } b = \frac{1}{2}(R-OH)$$

On sait que dans tout triangle on a:

$$\overline{OH}^2 = R^2 (1-8 \cos A. \cos B. \cos C.)$$

et $$\overline{OH}^2 = 9R^2 - (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2)$$

De là:

3° Dans chaque triangle ABC on a:

$$\cos A. \cos B. \cos C = \frac{a. b.}{2 (a+b)^2}$$

4° Dans chaque triangle ABC on a:

$$\sum \overline{AB}^2 = 4 (2a^2 + 2b^2 + 5 ab)$$

De là aisément comme $AB = 2 R \sin A$.

5°

$$\sum \sin^2 A = 2 + \frac{ab}{(a+b)^2}$$

$$\sum \cos^2 A = 1 - \frac{ab}{(a+b)^2}$$

$$\sum \cos 2A = -1 - \frac{2 ab}{(a+b)^2}$$

6° Dans chaque triangle ABC, le produit des segments supérieurs des hauteurs est constant et égal à:

$$AH. BH. CH = 8 R^3 \cos A. \cos B. \cos C$$
$$= 4 ab (a+b)$$

7° Dans chaque triangle ABC, le produit des segments inférieurs des hauteurs est constant et égal à:

$$HH_a. HH_b. HH_c = 8 R^3 \cos^2 A \cos^2 B. \cos^2 C$$
$$= \frac{2 a^2 b^2}{a+b}$$

8° En représentant par x, y, z les coordonnées normales de O dans le triangle ABC, on a:

$$x y z = \frac{ab (a+b)}{2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + ab.$$

9° Le produit des distances du centre O à l'un des côtés de ABC et à la droite joignant les points milieux des 2 autres côtés est constant et égal à:

$$R^2 \cos A. \cos B. \cos C = \frac{a\,b}{2}$$

10° Le produit des distances du centre O aux côtés du triangle complémentaire de ABC est constant et égal à:

$$\frac{a^3\ b^3}{8} : \frac{a\,b\ (a+b)}{2} = \frac{a^2\ b^2}{4\ (a+b)}$$

11° Le produit des diamètres de l'ellipse, parallèles aux côtés de ABC est constant et égal à

$$16\ \frac{a^2\ b^2}{a+b}$$

IIme partie.

Des formules connues:

$$a = b \cos \hat{C} + c \cos \hat{B}$$
$$b = a \cos \hat{C} + c \cos A$$
$$c = a \cos \hat{B} + b \cos A,$$

on déduit en éliminant les côtés:

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos \hat{C} & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} = 0$$

d'où la formule bien connue aussi:

I) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A. \cos B \cos C = 1$

Portons $AC' = BH_c$, $AB' = CH_b$; on sait qu'il existe une ellipse E tangente aux trois côtés aux conjugués isotomiques des pieds des hauteurs et dont le centre est O. (figure I).

A est donc le pole de B'C' et par conséquent AO bisecte B'C'.

Théorème: Soient A'B'C' les conjugués isotomiques des pieds des hauteurs et $\alpha\ \beta\ \eta$ les points milieux des droites B'C', A'C', A'B', les trois droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\eta$ se coupent au centre O du cercle circonscrit au triangle ABC.

Calcul de Aα: On a $AC' = BH_c = a \cos B$

$AB' = CH_b = a \cos C$

donc $\overline{B'C'}^2 = a^2 \cos^2 B + a^2 \cos^2 C - 2\, a^2 \cos A \cos B \cos C$

$= 4\, R^2 \sin^2 A\, [\cos^2 B + \cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C]$

Or: $\overline{AC'}^2 + \overline{AB'}^2 = 2\ \overline{C'\alpha}^2 + 2\ \overline{A\alpha}^2$

donc: $2\ \overline{A\alpha}^2 = 2\, R^2 \sin^2 A [\cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C]$

$= 2\ R^2\ \sin^4 A$ (d'après formule I)

$A\alpha = R \sin^2 A$

$O\alpha = R \cos^2 A$

Cherchons sur la droite OA, les points x et y tels que O soit le milieu de x y et que x et y divisent Aα harmoniquement.

On aura: $Ox^2 = Oy^2 = O\alpha.\ OA = R^2 \cos^2 A$

$Ox = Oy = R \cos A$

Donc $xy = AH$

Théorème: Le diamètre de la conique E dirigé suivant OA est égal au segment supérieur AH de la hauteur AH_a.

Triangle orthique d'un triangle ABC.

Le triangle orthique $H_a\ H_b\ H_c$ est inscrit au cercle d'Euler de ABC. *Le lieu du centre* O_9 *du cercle circonscrit à ce triangle* est donc une circonférence de centre O et de *rayon* $\frac{a-b}{2}$. L'orthocentre H du triangle ABC est le centre du cercle inscrit au triangle orthique, donc: *Le lieu du centre* H du cercle inscrit est une circonférence de centre O et de rayon (a—b)

Le rayon du cercle circonscrit à $H_a\ H_b\ H_c$ reste constant $R' = \frac{R}{2} = \frac{a+b}{2}$; il est facile de démontrer que le rayon r′ du cercle inscrit à $H_a\ H_b\ H_c$ reste aussi constant.

En effet: $a' = a \cos A$; $b' = b \cos B$; $c' = c \cos C$.

donc $2\ p' = \Sigma\, a \cos A = \Sigma\ 2\ R \sin A \cos A = R \Sigma \sin 2\ A$

$2\ p' = 4\ R \sin A \sin B \sin C$

2 surface du triangle orthique $= 2\ S' = a'\ b' \sin 2\ C$

$2\ S' = ab \cos A \cos B \sin 2\ C$

$= R^2 \sin 2\ A \sin 2\ B \sin 2\ C$

$$r' = \frac{S'}{p'} = 2\,R\cos A\cos B\cos C = \frac{ab}{a+b}$$

On a donc:

$$R' = \frac{a+b}{2};\ r' = \frac{ab}{a+b}$$

Si d'un point P, on mène les quatre normales possibles à une ellipse, on sait d'après un théorème de *Joachimsthal* que trois des pieds des normales et le point diamétralement opposé sur l'ellipse au quatrième pied sont quatre points d'une même circonférence. Cette remarque nous permettra de construire les quatrièmes normales des points N et H à l'ellipse.

Soit donc un triangle ABC inscrit dans le cercle de rayon $R = a+b$ et circonscrit à l'ellipse E [*figure 2*] OH fait avec un des axes de E un certain angle φ. Construisons la symétrique de OH par rapport aux axes de E et soit Q son point d'intersection avec le cercle. Comme $OQ = a+b$ et $OH = a-b$ et comme l'angle QOH est divisé en parties égales par les axes de E, on sait d'après Chasles, que HQ est normale à l'ellipse en son point milieu P et que $PH = PQ =$ le demi-diamètre conjugué à OP.

La perpendiculaire abaissée de O sur la tangente en P est égale en représentant par α l'angle de OP avec son diamètre conjugué à OP sin α et par conséquent d'après un théorème bien connu d'*Apollonius* en représentant la distance de O à la tangente par d on a:

$$d.\ HP = OP.\ HP \sin\alpha = ab.$$

Supposons une seconde ellipse Σ inscrite dans le triangle ABC et admettant pour foyers O et H. Son centre sera le centre O_9 du cercle des neuf points du triangle. Soit R le symétrique de H par rapport à BC. OR sera le grand axe de l'ellipse Σ et coupera BC au point de contact. Mais d'après un théorème connu de géométrie, les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport à ses côtés appartiennent à la circonférence circonscrite au triangle, donc OR le grand axe de l'ellipse Σ est égal à $a+b$.

On a donc pour cette ellipse $2a' = a+b$

$$2c' = OH = a-b$$

$$2b' = 2\sqrt{ab}$$

On sait que les pieds des perpendiculaires abaissées des foyers d'une ellipse sur les tangentes sont sur le cercle principal de l'ellipse

et que le produit des deux perpendiculaires abaissées des foyers sur une tangente quelconque est égal au carré du demi petit axe. Comme d'après une relation précédente

$$\text{d. HP} = \text{ab} = \overline{\text{b}'^2}$$

il en résulte que la tangente à E au point P est aussi tangente à Σ d'où le théorème énoncé par Mr. *Böklen* [Dr. O. Böklen, Oberstudienrath à Stoutgart]

Théorème: Les deux ellipses E et Σ ont 4 tangentes communes, les 3 côtés du triangle ABC et une quatrième tangente dont le point de contact avec E est le pied P de la 4me normale de H à l'ellipse. Comme H et N sont symétriques par rapport à O, le point diamétralement opposé de P sur E est le pied de la 4me normale de N à E. Le point P est un des points d'intersection du cercle d'Euler de ABC avec l'ellipse E.

Transformons l'ensemble des deux ellipses E et Σ ainsi que le cercle principal de Σ, ou cercle d'Euler de ABC, par polaires réciproques, par rapport à une circonférence de centre O et de rayon $\varrho = \sqrt{\text{ab}}$. (voir figures 3′ et 3″)

L'ellipse E d'axes $AA_1 = 2\,a$ et $BB_1 = 2\,b$ se transforme suivant une ellipse égale E′ tournée autour de O de 90°.

L'ellipse Σ de foyers O et H de grand axe $CC_1 = a+b$ [$OC = a$ et $OC_1 = b$ puisque $OH = a-b$] se transforme suivant un cercle Σ' décrit sur $C'C_1'$ comme diamètre; $OC' = b$ et $OC_1' = a$, le cercle principal de Σ tourné de 180°. Enfin le cercle principal S se transforme suivant une conique S′ de foyer O égale à la conique Σ tournée de 180° autour de O.

Les deux coniques E′ et S′ ainsi obtenues, ayant la même position relative que les coniques E et Σ, il en résulte qu'aux points d'intersection de E et S correspondent 4 tangentes communes des coniques E′ et S′ dont trois forment un triangle inscrit dans une circonférence de centre O et de rayon (a+b). En revenant à la figure primitive on a le théorème suivant de Mr. *Böklen.*

Théorème: Le cercle principal de la conique Σ ou le cercle d'Euler du triangle ABC coupe l'ellipse E en 4 points: un de ces points P est le pied de la 4me normale abaissée de H sur E. Les trois autres points A_2 B_2 C_2 forment un triangle cir-

conscrit à une circonférence fixe de centre O et de rayon $\frac{a\,b}{(a+b)}$

Les triangles variables $H_a\,H_b\,H_c$ et $A_2\,B_2\,C_2$ sont inscrits dans un même cercle variable, mais de rayon constant $R = \frac{a+b}{2}$ et ont un rayon de cercle inscrit constant $r = \frac{a\,b}{a+b}$.

Ces triangles jouissent de nombreuses propriétés provenant de l'invariance de R et r.

Ces propriétés seront démontrées en note à la fin du travail.

Démonstration analytique d'un dernier théorème de Mr. Böklen.

Soient de nouveau l'ellipse E, le point H, HP la 4me normale à E; HP étant égal au demi-diamètre conjugué à OP; α étant l'angle excentrique de P, OH est égal à (a—b) et forme un angle α avec le grand-axe de E.

Le cercle d'Euler de ABC de centre O_9, point milieu de OH passe ainsi que nous l'avons vu par P et le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente en P à E. [fig. 4]

D'après un théorème de Laguerre, on peut considérer ce cercle comme un cercle de Joachimsthal et par conséquent les normales à la conique E, aux points A_2, B_2, C_2 sont concourantes en un point Q, situé sur la normale au point p, diamétralement opposé à P sur E.

Si d'un point Q quelconque, pris sur la normale fixe au point p (x′ y′) de l'ellipse E, on abaisse les trois autres normales à E, leurs pieds sont sur une circonférence qui passe aussi par le point diamétral P de p (coordonnées —x′—y′) d'après le théorème de Joachimsthal.

Cette circonférence passe aussi par le pied N de la perpendiculaire abaissée du centre O de l'ellipse sur la tangente au point P (théorème de Laguerre). Si le point de concours Q des normales se déplace sur la normale en p, le lieu du centre du cercle de Joachimsthal est une droite, la perpendiculaire à NP en son point milieu.

Le cercle d'Euler passant par P et N est donc bien un cercle *de Joachimsthal.*

Le symétrique du centre O de l'ellipse par rapport au centre du cercle J (ici H) et le symétrique Q′ du point Q de concours des normales par rapport à O sont évidemment sur la normale en P.

Mais on peut démontrer que ces deux points sont isotomiques sur cette droite par rapport aux axes.

En effet soient x′, y′ les coordonnées de p et α, β celles du point Q; l'équation du cercle de Joachimsthal sous la forme que lui a donnée Mr. de Longchamps sera:

$$x^2 + y^2 + xx' + yy' - u\left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + 1\right) = 0$$

où $u = a^2 + \frac{b^2\beta}{y'} = b^2 + \frac{a^2\alpha}{x'^2}$.

On aura pour les coordonnées de son centre.

$$2x = -x' + \frac{ux'}{a^2} = -x' + \frac{x'}{a^2}\left(a^2 + \frac{b^2\beta}{y^1}\right) = \frac{b^2\beta x'}{a^2 y'}$$

$$2y = -y' + \frac{uy'}{b^2} = \frac{a^2\alpha y'}{b^2 x'}$$

On a donc pour les coordonnées du point H:

$$X = 2x \quad Y = 2y$$

Or $XY = \alpha\beta$

Les points Q, Q′ H sont donc sur une hyperbole équilatère de centre O et dont les asymptotes coincident avec les axes de E.

On a donc bien HL = Q′M.

Donc PL + PM = PH + PQ′.

Or comme PH = b′

on sait que $PL = \frac{b}{a}b'$ et $PM = \frac{a}{b}b'$

Donc $\frac{b}{a}b' + \frac{a}{b}b' = b' + PQ'$

Il en résulte $PQ' = \gamma$. PH. Le lieu du point Q′ est donc une ellipse coaxiale à la proposée; il en sera de même pour le lieu du point Q. Voici d'ailleurs son équation:

Les coordonnées du point P sont: $-x' = a\cos\varphi$; $-y' = b\sin\varphi$

nous avons trouvé pour H: $x = \frac{b^2\beta x'}{a^2 y'}$; $y = \frac{a^2\alpha y'}{b^2 x'}$

Mais on sait aussi que:

$$x = (a—b)\cos\varphi \text{ et } Y = —(a—b)\sin\varphi$$

$$\text{Donc: } (a—b)\cos\varphi = \frac{b^2\,\beta\,a\cos\varphi}{a^2\,b\,\sin\varphi}$$

$$—(a—b)\sin\varphi = \frac{a^2\,\alpha\,b\,\sin\varphi}{b^2\,a\,\cos\varphi}$$

$$\text{ou: } \sin\varphi = \frac{b}{a}\frac{\beta}{(a—b)};\ \cos\varphi = -\frac{a}{b}\frac{\alpha}{(a—b)}$$

et pour le lieu du point Q l'ellipse

$$\frac{\alpha^2}{\frac{b^2}{a^2}(a—b)^2} + \frac{\beta^2}{\frac{a^2}{b^2}(a—b)^2} = 1$$

1re Note relative à un problème de Steiner.

Une conique est inscrite dans un triangle ABC. Soient A′, B′, C′ les points de contact sur les côtés BC, AC, AB. Déterminer le centre M de la conique.

1re solution (fig. 5).

On sait que dans toute conique à centre, le produit sur deux tangentes parallèles, des segments déterminés par une tangente variable quelconque est égal au carré du demi-diamètre de la conique, parallèle aux tangentes fixes.

Menons à notre conique, une tangente parallèle à BC, qui coupe AB et AC respectivement en ß et γ et dont le point de contact soit α.

On a d'après le théorème cité:

$$\text{I} \qquad \alpha\,\beta.\ A'B = \alpha\,\gamma.\ A'C$$

A α coupe BC en A″; on aura: $\alpha\beta : A''B = \alpha\,\gamma : A''C$

$$\text{II} \qquad \alpha\,\beta.\ A''C = \alpha\,\gamma.\ A''B$$

De ces deux égalités on déduit: $\frac{A'B}{A'C} = \frac{A''C}{A''B}$

Il en résulte que les points A′ et A″ sont isotomiques sur BC. Le point milieu A_0 de A′A″ est donc aussi le point milieu de BC.

Soit D le point milieu de AA′. La droite DA_0 parallèle à AA′′ divisera donc aussi $\alpha A'$ en parties égales. Or $\alpha A'$ est un diamètre de la conique.

Le centre M. point milieu de $\alpha A'$ est donc situé sur DA_0.

Théorème : Une conique est tangente aux trois côtés d'un triangle ABC. aux points A′, B′, C′. Soient A_0 B_0 C_0 les points milieux des côtés. Les trois droites qui joignent les points milieux des droites AA′, BB′, CC′ respectivement aux points A_0 B_0 C_0 se coupent au centre M de la conique.

IIme solution (même figure).

Le pôle de la droite AA_0 doit se trouver sur le rayon conjugué de AA_0 par rapport à AB et AC; or A_0 étant le milieu de BC, ce rayon sera parallèle à BC. Il doit aussi se trouver sur la polaire B′ C′ de A par rapport à la conique. Le point L, où ces deux droites se croisent sera le pôle cherché. A′ L sera donc la polaire de A_0. Soit N le second point d'intersection de A′ L avec la conique, par conséquent, le point de contact de la deuxième tangente menée de A_0 à cette courbe. Les 4 points A′ (AA_0, A′ L), N et L sont harmoniques; comme AL est parallèle à A′ A′′, il en résulte que $A' A_0 = A_0 A''$. Le diamètre passant par A_0, doit diviser en parties égales la polaire A′ N de ce point; il est par conséquent parallèle à AA′′; il divise donc aussi AA′ en parties égales en D; d'où le théorème.

IIIme solution (fig. 6).

D'après la méthode de Schroeter.

On sait que les paires de tangentes parallèles à une conique donnée, déterminent sur une tangente fixe, une série involutive. Le point de contact sur cette dernière est le centre de l'involution. La réciproque de cette proposition est exacte.

Soit M le centre cherché; menons les droites symétriques de AC et AB par rapport au point M. Ces droites sont tangentes à la conique et si elles rencontrent BC respectivement en γ et β, les paires de points B β et C γ déterminent sur la tangente B C l'involution produite par les paires de tangentes parallèles. Cette involution est donc parfaitement déterminée.

Projetons centralement, du sommet A sur la parallèle b_1, c_1, à BC, (b, milieu de AC) cette involution: On obtient ainsi les deux paires de points c_1, γ_1, et b_1, β_1,. β_1, étant le point milieu de A γ et les deux

droites AC et $\gamma\ \varepsilon$ étant parallèles, on a évidemment pour A_0 comme milieu de BC: M β_1, parallèle de $A_0\ c_1$, et M γ_1, parallèle de $A_0\ b_1$,; s intersection de MA_0 avec b_1, c_1,

$$\text{Donc: } \frac{s\ b_1}{s\ \gamma'} = \frac{s\ A_0}{s\ M} = \frac{s\ c_1}{s\ \beta_1} \text{ ou: } s\,b.\ s\,\beta, = s\,c_1.\ s\,\gamma_1$$

s est donc le point central de l'involution sur la droite $b_1\ c_1$ et comme elle est parallèle à BC, la projection centrale de s sur BC sera aussi le point central de l'involution sur BC_1 c'est-à-dire le point de contact de cette droite avec la conique. La droite qui joint le point milieu de AA_1 au point milieu de BC passe donc bien par le centre M de la conique.

Note seconde (fig. 7).

Une transversale tourne autour d'un point fixe P et coupe les côtés d'un triangle ABC, BC en A′, AC en B′, et AB en C′. Soient sur le côté BC, A″ le point isotomique de A′; sur AC, B″ l'isotomique de B′ et sur AB, C″ l'isotomique de C′.

A″ B″ C″ est une ligne droite, la transversale réciproque de A′ B′ C′ (nomenclature de Mr. de Longchamps; démonstration évidente par application du théorème de Ménélaüs).

Quelle est l'enveloppe de A″ B″ C″, lorsque A′ B′ C′ tourne autour du point P.?

B et C, A′ et A″ sont les couples d'une involution ponctuelle dont les points doubles sont A_0, le point milieu de BC et le point infini sur BC.

De même A et B, C′ et C″ sont les couples d'une involution centrale dont les points doubles sont C_0 et le point ∞ de AB.

Or les ponctuelles A′ et C′ sont perspectives; il en résulte que les ponctuelles A″ et C″ sont homographiques et par conséquent la droite A″ C″ enveloppe une conique tangente aux trois côtés du triangle. Comme il est facile de le voir, le point α isotomique sur BC, du point d'intersection de cette droite avec PA sera le point de contact de BC avec son enveloppe. $A\alpha$ et AP étant conjuguées isotomiques, il en résulte que $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ se croisent en un même point, le *point de Gergonne* de la conique, point réciproque de P.

Il est facile de trouver le centre de la conique enveloppée. On pourrait utiliser le théorème de la note précédente. D'après ce

théorème, le centre M se trouve sur la droite $A_o D$ qui joint les points milieux de BC et $A\alpha$. Soit G le centre de gravité du triangle ABC; PG coupe $A_o D$ en M. Les triangles MGA_o et GAP étant semblables on a: $GP = 2\ GM$.

M est donc un point fixe de la droite GP, donc les trois transversales telles que $A_o D$ passent par ce point qui sera le centre de la conique.

M est le complémentaire de P qui est le réciproque du point de Gergonne de la conique.

Si par ex: on fait tourner une transversale autour de l'orthocentre du triangle, les transversales réciproques enveloppent une conique, tangente aux trois côtés du triangle, aux points isotomiques des pieds des hauteurs et dont le centre coïncide avec le centre du cercle circonscrit.

Note troisième.

Dans cette dernière note, nous développerons quelques formules, dont chacune d'elles fournirait un théorème commun aux triangles variables $H_a H_b H$ et $A_2 B_2 C_2$

Dans tout triangle on a:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}$$

$$r = p \operatorname{tg}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

$$R = \frac{p}{4 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}}$$

$$\text{donc } \frac{r}{R} = 4 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}$$

et par conséquent:

Formule 1: $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$

Donc dans chacun des triangles variables $H_a H_b H_c$ et $A_2 B_2 C_2$ la somme des cosinus de leurs angles reste toujours constante. Dans ce qui suit, nous ne ferons plus que citer la formule.

Comme $1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2}$

$$\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} = \frac{1}{2}\left[3 + \cos A + \cos B + \cos C\right]$$

Formule 2: $\sum \cos^2 \frac{A}{2} = 2 + \frac{r}{2R}$

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = \sum (1 - \cos^2 \frac{A}{2})$$

$$= 3 - \sum \cos^2 \frac{A}{2}$$

Formule 3: $\sum \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{r}{2R}$

Formule 4: $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$

$$\frac{abc}{2p} = \frac{4RS}{2p} = 2R\frac{S}{p}$$

donc:

Formule 5: $\frac{abc}{2p} = 2Rr$

La perpendiculaire abaissée du centre O du cercle circonscrit a pour valeur $x = R \cos A$.

$$\Sigma x = R \Sigma \cos A$$

Formule 6: $\Sigma x = R + r$ (formule de Carnot)

$$a \operatorname{ctg} A + b \operatorname{ctg} B + c \operatorname{ctg} C = \Sigma 2R \sin A . \frac{\cos A}{\sin A}$$

Formule 7: $\Sigma a \operatorname{ctg} A = 2(R + r)$

Soit H l'orthocentre; on sait que $AH = 2x$

Formule 8: $AH + BH + CH = 2(x + y + z) = 2(R + r)$

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{p}{S}$$

Formule 9: $\frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} = \frac{1}{r}$

Formule 10: $r' + r'' + r''' = 4R + r$

Formule 11: $\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''} = \frac{1}{r}$

On a comme conséquence d'une formule d'Euler

$$\overline{OI'}^2 + \overline{OJ''}^2 \overline{OJ'''}^2 = \Sigma (R^2 + 2\,R r')$$
$$= 3\,R^2 + 2\,R\,(r' + r'' + r''')$$
$$= 3\,R^2 + 2\,R\,(4\,R + r)$$

Formule 12: $\overline{OJ'}^2 + \overline{OJ''}^2 + \overline{OJ'''}^2 = 11\,R^2\,2 + Rr$

Comme $\overline{AJ}^2 = \frac{p-a}{p}\,b\,c$

$$\overline{AJ}^2 . \overline{BJ}^2 . \overline{CJ}^2 = \frac{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{p^4}\,a^2 b^2 c^2 = \frac{S^2}{p^4}\,a^2\,b^2\,c^2$$

$$\overline{AJ} . \overline{BJ} . CJ = \frac{S}{p^2}\,a\,b\,c = \frac{4\,R\,S^2}{p^2}$$

Formule 13: $\overline{AJ}. \overline{BJ}. \overline{CJ} = 4\,R\,r^2$.

$AJ' = \frac{p}{\cos\frac{A}{2}}$; $AJ = \frac{p-a}{\cos\frac{A}{2}}$; donc $JJ' = \frac{a}{\cos\frac{A}{2}}$

$JJ'. JJ''. JJ''' + \frac{a\,b\,c}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$ d'où

Formule 14: $JJ'. JJ''. JJ''' = 16\,R^2. r$

Formule 15:
$$\overline{JJ'}^2 + J'\overline{J'''}^2 = 16\,R^2$$
$$\overline{JJ''}^2 + J'\overline{J'''}^2 = 16\,R^2$$
$$\overline{JJ'''}^2 + J'\overline{J''}^2 = 16\,R^2$$

Ces formules dérivent immédiatement des formules connues $\overline{AH}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{4\,R}^2$, le rayon de la circonférence circonscrite au triangle $J'\,J''\,J'''$ étant égal à 2 R.

On trouve aisément aussi $J''\,J''' = 4\,R\cos\frac{A}{2}$

$$\overline{JJ'}^2 + \overline{JJ''}^2 + \overline{JJ'''}^2 = 48\,R^2 - 16\,R^2\left[\cos^2\tfrac{A}{2} + \cos^2\tfrac{B}{2} + \cos^2\tfrac{C}{2}\right]$$

Formule 16: $\overline{JJ'}^2 + \overline{JJ''}^2 + \overline{JJ'''}^2 = 16\,R^2 - 8\,Rr$

Formule 17: $J''\overline{J'''}^2 + \overline{J'J''}^2 + \overline{J'J'''}^2 = 32\,R^2 + 8\,Rr$.

Porrentruy ce 1er Août 1900.

Figure 1.

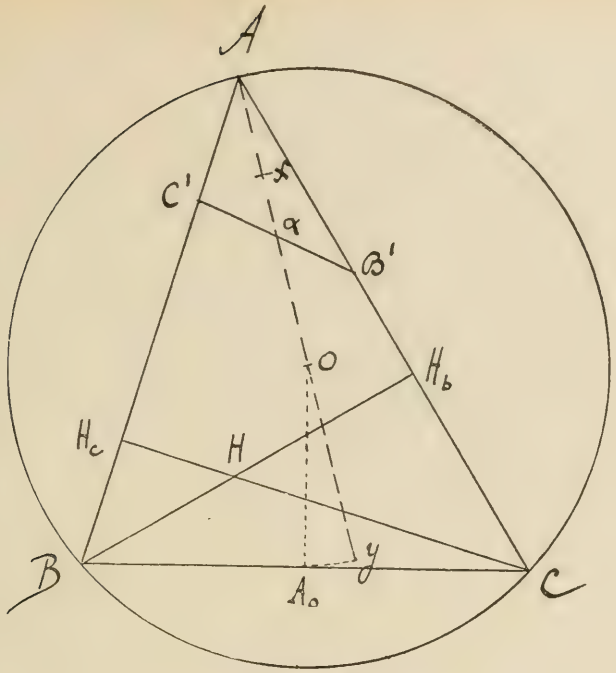


Figure 2.

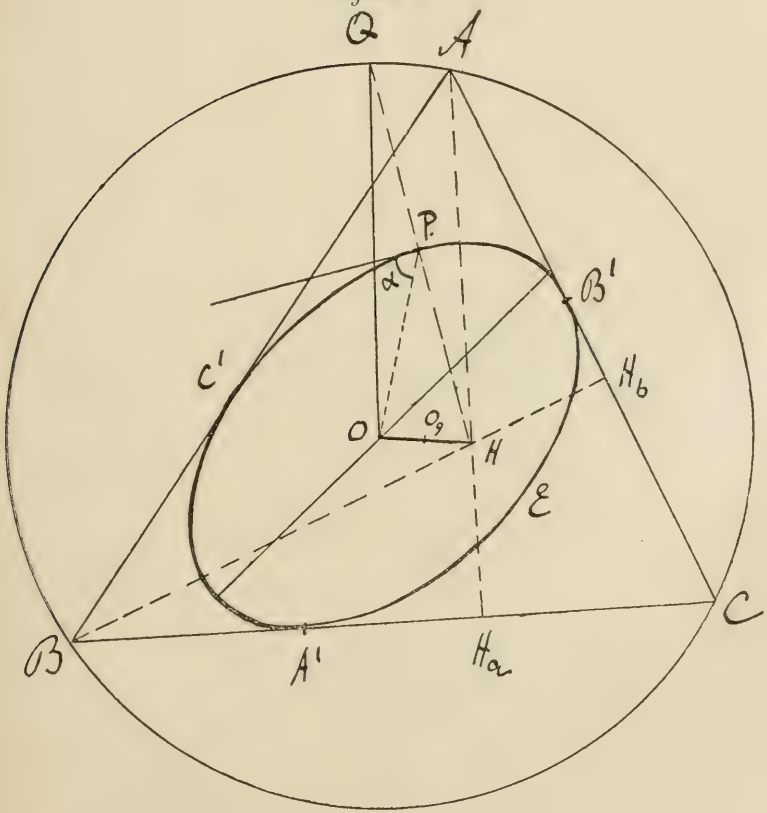


Figure 3a.

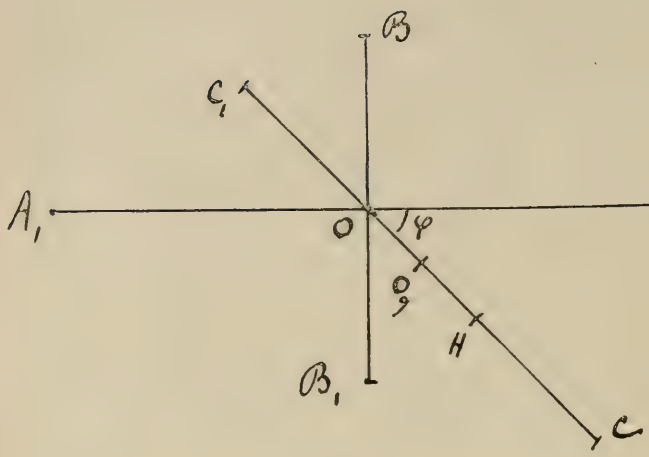


Figure 3b.

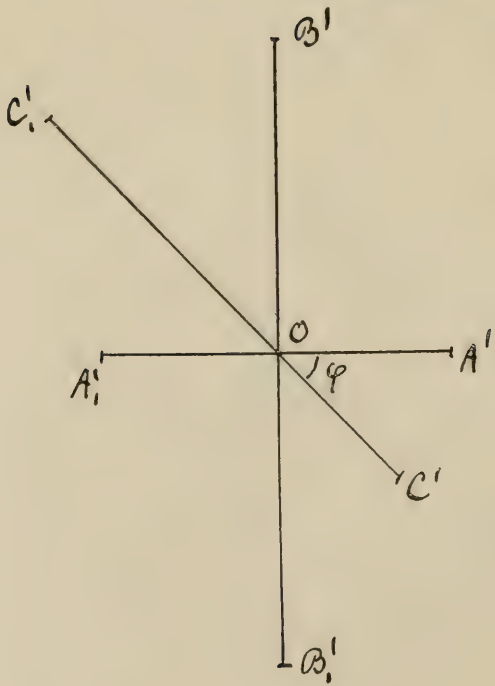


Figure 4.

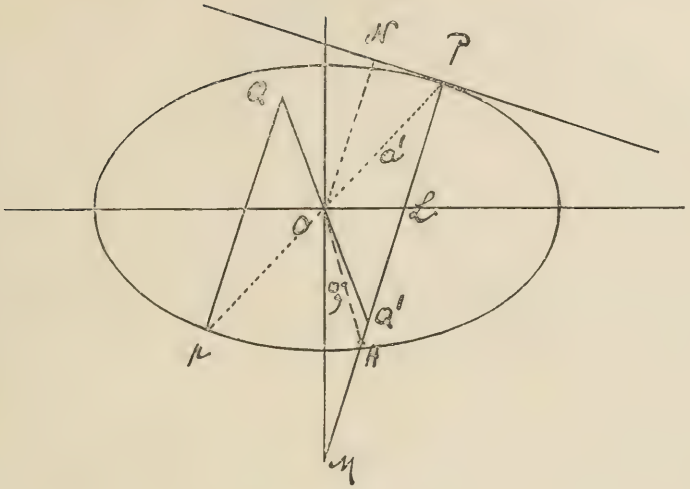


Figure 5.

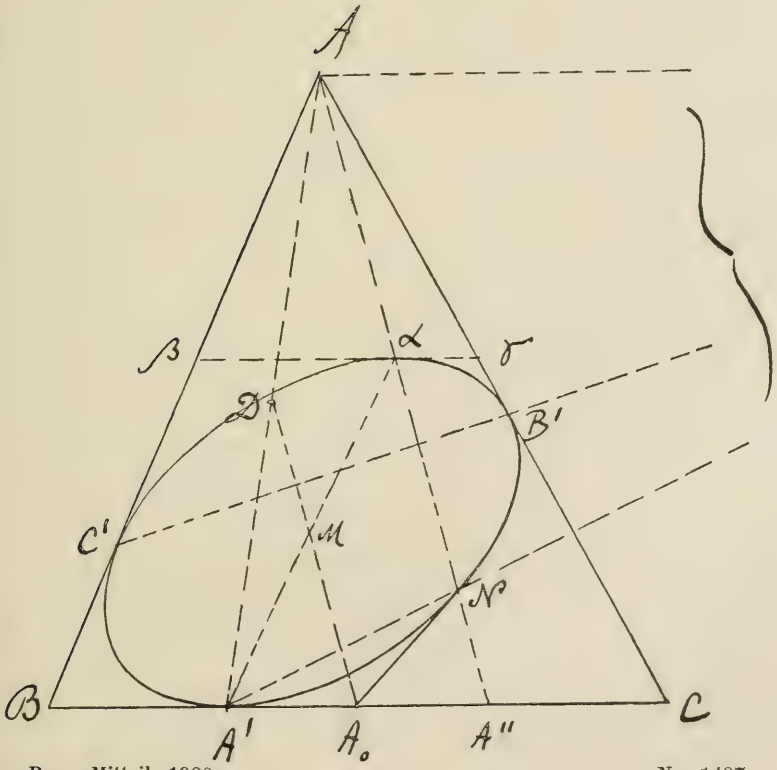


Figure 6.

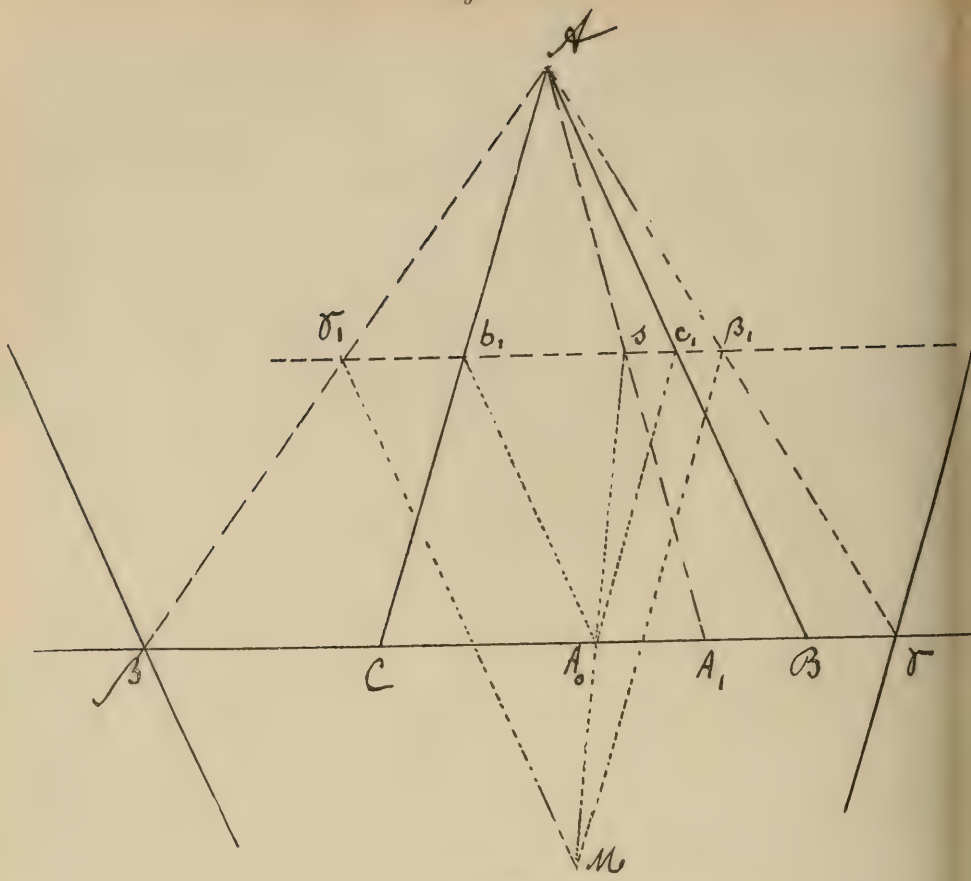
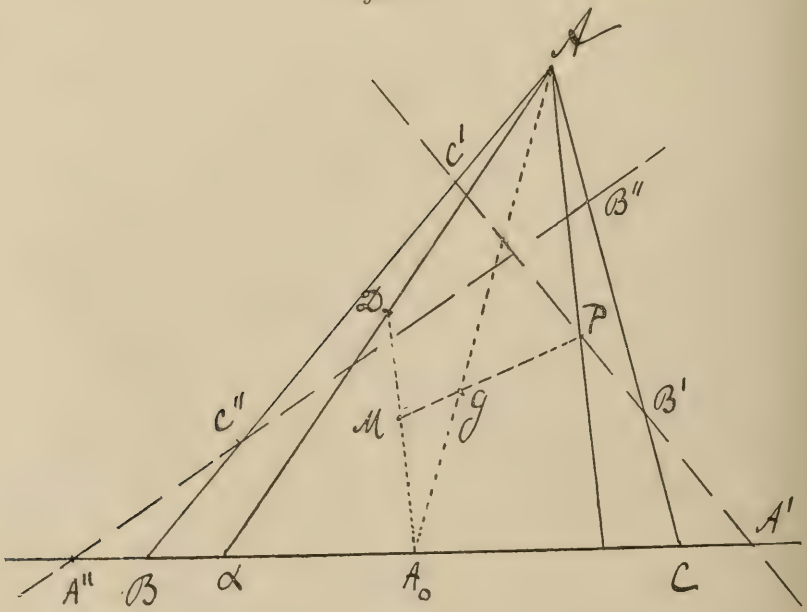


Figure 7.



J. H. Graf.

Notizen

zur

Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in der Schweiz.

No. 56. L'Auteur a page 12 cite lexperience de Fahrenheit sur leau bouillante savoir quelle depend pour son degré de chaleur du poids de l'atmosphere et il estime à peu près le point necessaire à fixer du barometre au terme de 27 ponces 9 lignes mesure du Paris. coē je lai fixé car je crois que ces 27 pouces 9 lignes equivalent à 30 pouces Anglois. Mr. *le Monnier*[1]) se donne ici à connoître pour le traducteur, puisquil cite au bas dans la note une experience par lui deja raportée dans un autre livre Anglois par lui traduit et ou est son nom. ce livre contient la table de Mr. Newton relative à son therm^{e}, lauteur est un professeur de Cambridge, je passe à present au second chap. pag. 51 ou il est parlé de deux therm^{es} de Florence d'un grand et d'un petit et supposé le terme de la glace ou neige fondante au grand au 20e degré et au petit a $13^1/_2$ et ensuite le terme superieur du soleil ou visceres d'animaux à 80 au grand et 40 au petit et l'on conclut dela que les observations faites avec des therm^{es} de Florence reguliers et bien construits peuvent servir.

Mais en lisant les actes de l'academie de Florence intitulé *Tentamina* etc. on y voit que la regularité de la construction de ces instruments dependoit de l'habilité du souffleur qui savoit souffler disent ils une boule proportionelle pour sa contenance à la capacité du tuiau, croiez vous cela possible Mr. je n'en crois rien, d'ailleurs si vous remplissez le therm^{e} avec de l'esprit de vin teint avec de la cochenille qui fait la boule orangée ou teint avec de l'orcanette qui

[1]) *Le Monnier*, Pierre Charles, Prof. der Physik am Collège de France, Astronom der Marine, 1756 Theilnehmer an der lappländischen Gradmessung, geb. 23. Nov. 1715 in Paris, † 2. April 1799 in Héril.

la fait noire, le therm^e^ d'orcanette montera beaucoup plus haut au soleil que non pas l'autre, la forme encore de la boule peut procurer à cet egard beaucoup de difference de meme que le bois ou le therm^e^ se trouve enchassé, ainsy ces therm^es^ reglez au soleil ne seront pas d'accord entr'eux à l'ombre, et qui peut repondre d'ailleurs que ces experiences des visceres soient egales à celles du soleil, si elles n'ont pas eté faites avec les memes instrumens. Ainsy jai negligé dans mes observations la relation des No. 2 et 3 de ces deux therm^es^ de Florence pareillement le No. 4 de Paris; pour le 5 je l'ai raporté en correspondance sur plusieurs therm^es^ pareillement le 6 *d'Amontons*[1]) et il sera bien raporté si ce qu'il dit est vray que la marche de lair est egale à celle de lesprit de vin. le No. 7 est la meme chose que le No. 6, le No. 9 que jai raporté est à peu pres la meme que 10. Jai raporté ainsy dans plusieurs le No. 11 que j'ai rectifié d'apres d'autres observations, jai ainsy raporté No. 12 sur mes planches gravées, No. 13 sur plusieurs therm^es^ No. 14 que jai bien rectifié et No. 15 je l'ai abandonné. Or en tout cela Monsieur il y a beaucoup d'erreur car les therm^es^ de Mr. de *Reaumur* n'ont pas la meme marche que les autres dans les degrez de froid, ceux de Mercure s'accorderont avec ceux d'esprit de vin en deux therm^es^ savoir à l'eau bouillante entierement plongez, et au therme de l'eau dans la glace, et differentieront beaucoup dans les termes intermediaires et bien d'avantage encore dans les grandes degrez de froid. Le thermometre de Mr. *Newton* a une marche qui approche celle de Mercure, mais qui en differe cependant sensiblement, et pour ce qui est de celui de Mrs. *Amontons* et *Poleni*[2]) ... je ne pus pas poursuivre à Bale mes experiences sur les therm^es^ à air tels que je les ai fait d'abord, je ne saurois rien dire de positif sur leur marche si ce n'est que je m'en suis raporté au 1er, je suis bien etonné qu'aiant donné à Mr. le Monnier un excellent parallele de mercure et d'esprit de vin, cheminant jusqu'à l'eau bouill^e^ et jusqu'aux plus grands froids et encore un therm^e^ d'esprit de vin sur ma planche gravée, il ait fait abstraction dans les notes de cette difference si capitale des marches dont je me suis si souvent entretenu avec lui car il n'en sauroit pretexter cause

---

[1]) *d'Amontons Guillaume*, geb. 31. VIII. 1663 zu Paris, † 11. X. 1705 in Paris, Mitglied der Akademie der Wissenschaften.

[2]) *Poleni Giovanni*, geb. 23. VIII. 1683 in Venedig, † 14. XI. 1761 in Padua. Marchese, Prof. der Astronomie, der Philosophie und Mathematik zu Padua.

d'ignorance aiant de moi non seulement ce parallele mais encore ma planche gravée ou sont ces therm^es de *Newton, Delisle, Fahrenheit* et *Reaumur* en correspondance avec le mien. Or ces correspondances toutes differentes de celles de la table de Docteur *Martine* et justifiées par mon parallele et par mon imprimé de 1741 dont je lui ai aussy remis un exemplaire, renversent totalement le sisteme de cette table de façon que je suis grandement etonné qu'il avance dans sa préface à la page 10 parlant de cette table ces paroles suivantes:

Cette table de camparaison est la plus exacte qu'on ait faite jusquici (1751) c'est le jugement qu'en porte Mr. de Mairan[1]) *qui l'a verifiée avec les thermometres de Mr. de* Reaumur, Amontons, Hawksbee[2]) *et* Fahrenheit, *et tout le monde sait de quel poids est une pareille decision. Cette meme table peut tenir lieu d'un Thermometre universel, dont la pluspart des Physiciens ont reconnu les avantages sans avoir cherché à les procurer.*

Je suis porté à croire en lisant cela, que j'ai quelque ami à Paris qui s'entend avec Mr. *le Monnier* pour le refuter et pour attaquer de cette facon Mrs. *de Reaumur* et *de Mairan* et ce pourroit bien etre un ou deux Peres chartreux nos amis communs; si cela est on aura soin sans doute à Paris de faire parvenir la brochure a la personne à la quelle on a adressé le livre sur lequel je fais ces remarques, le tems eclaircira cette conjecture.

Jai encore oublié de vous raporter une remarque sur la matiere precedente. C'est que le Docteur *Martine*[3]) ne supposoit pas plonger dans l'eau bouillante tous les therm^es de la table pour les comparer, et quoique aucun ne l'ait fait avant moi, il le faut cependant ainsy supposer et pour cet effet ajouter l'excez, afin de pouvoir faire les comparaisons, car si vous ne supposez pas plongée toute la liqueur du therm desprit de vin dans l'eau bouillante, il manquera dans ce terme pres de dix de mes degrez de moins qui en valent environ 16 de Fahrenheit, au lieu qu'en ne plongeant pas non plus de meme Fahrenheit cela ne faira qu'un excez de deux, et c'est pourquoi jai

---

[1]) *Mairan, Jean Jacques d'Ortous de,* geb. 26. XI. 1678 in Béziers, † 1771 20. II. zu Paris, Sekretär der Akademie der Wissenschaften zu Paris.

[2]) *Hawksbee, Francis,* 1713 gestorben, Mitglied der Royal Society.

[3]) *Martine,* ein schottländischer Schiffsarzt, promovirte in St. Andrews, geb. 1702, † 1743, schrieb «Essai sur la construction et la comparaison des thermomètres» und andere Arbeiten über die Wärme.

supposé l'eau bouille à Fahrenheit à 214 et averti que le zero de Mr *de Lisle* repondoit à 97 degrez $7^1/_2$ de mon therme. Or j'ai tenu compte de toutes ces corrections qu'il faut necessairement faire pour avoir la correspondance juste, autrement cela n'est pas possible.

Personne avant moi ne s'est avisé de graduer les thermes de 5 en 5 avec des soies sur les tuiaux, de les tenir entierement plongez dans l'eau lorsqu'on les eprouve de 5 en 5 degrez jusqu'a l'eau bouille et de faire faire une machine de fer blanc qui pivote et tourne dans l'eau avec les thermes et d'avoir une multitude de petits lampions pour donner sous cette machine le degré de feu convenable, c'est pourtant ce qu'il faloit faire afin de reconnoitre les diverses marches des liqueurs, pour pouvoir marquer leur comparaison et c'est ce que jai fait non sans beaucoup de peine et beaucoup de travail jusqu'au point de fixer les minutes, secondes et tierces de degrez dernierement. Je passe à la dissertation sur l'echauffement et le refroidissement des corps, et comme jai presque rien travaillé sur cette matière, car j'apelle ne rien travailler lorsqu'on ne fait pas toutes les experiences qu'il faut faire pour bien approfondir un sujet cela fait que je ne vous dirai pas la dessus des choses bien curieuses, n'y interessantes. Mr. le Professeur *Bernoulli* m'a souvent sollicité à Bale d'y travailler mais j'ai toujours renvoié parceque je voulois voir auparavant comment il fait les thermes à air, qui regagnoient si vite leur equilibre à un demi degré près et que tardoient ensuite plusieurs heures avant que d'acquerir ce dernier point d'equilibre lorsqu'ils avoient passé une nuit au dehors de la chambre.

Mr. *Martine* a raison de refuter Mr. *Boerhave* et nombre d'autres sur le principe *que les corps emploient à s'echauffer et à se reffroidir, des tems proportionels a leurs densitez* et la reflexion quil propose la dessus art. 18 pag. 95 de la presomtion de l'esprit humain à prononcer trop rapidement sur semblable hose, n'est certainement pas un exemple des plus frapans de cette presomtion, car j'en pourrois citer un nombre excessif de plus forts dans des memoires meme d'Academie.

Le procedé à tenir pour faire les experiences convenables à cet egard sur la matiere des liquides est de regler les thermes comme je l'ai dit avec des soies de 5 en 5 degrez sur le verre et les suspendre en plein air eloignez les uns des autres dans une chambre fermée il faut que leurs boules et leurs tuiaux soient egaux en capacité, mais pour faire des pareils thermometres, il faut avoir comme moi un

magazin de 600 boules de toutes grosseurs et dont la capacité soit exactement reconnüe, de meme que des tuiaux d'un calibre egal. Or tout cela exige un tems tres long, et des attentions tres grandes, pour former ce magazin, et qui que ce soit à Paris n'y à Bale n'a voulu la dessus m'imiter, ainsy il ne faut pas etre surpris du retardement des progrez des decouvertes, car elles exigent beaucoup de peine, et le Docteur *Martine* en convient lui meme à pag. 113, lorsqu'il dit que cette doctrine de l'echauffement et du refroidissement des corps pourroit etre poussée beaucoup plus loins, et quil en laissoit le soin a ceux qui seroient en situation pour cela. Or il est certain qu'ici je ne le suis pas, puisque j'y suis logé comme un chien, et de plus dans un souterrain tres mal sain, ou je suis tres souvent attaquée par des oppressions de poitrine, ou je n'ai dailleurs pas la liberté de pouvoir me plaindre. Je passe au chapitre suivant qui traite des differens degrez de chaleur des corps.

Cette matiere il faut l'avouer est de la derniere utilité pour la medecine, mais tant que vous ne supposerez que la matiere ignée pour determiner l'action de la chaleur et l'action du froid comme le fait ici Mr. *Martine* et tant d'autres. Vous vous egarerez etrangement car vous batirez un edifice en lair pour ainsy dire, que vous ne pourrez plus elever solidement ensuite. En general on ne peut guere compter sur les observations faites jusqu'a present avec les therm^{es} de Mr. de *Réaumur* ainsy qu'il est demontré dans ma reponse à l'Abé *Nolet.* dont je vous prie Mr. de m'envoier ici une copie, que je prie de faire faire par un copiste et Mr. *Louvis* de le paier, car j'omets ici de parler de bien d'autres articles, puisqu'on trouve l'eclaircissement dans cette reponse.

Je dis donc Monsieur qu'il me paroit vraisemblable que la matière ignée est de 3 espèces, savoir la bleüe, la jaune et la rouge puisqu'on la peut separer au moien d'un prisme, et qu'etant une fois separée elle passe à travers un autre prisme d'un chalumeau et en conservant sa nature, et qu'il me paroit aussy vraisemblable que la matière du froid est de 3 espèces, savoir la première qui forme le froid commun depuis le plus grand chaud qu'il tempère jusqu'au terme de l'eau dans la glace, la seconde qui est plus grossière et qui sert à former la glace, et la 3e à produire dans le nord ces froids excessifs. Quant à ce que le froid soit une matière c'est ce qui se peut prouver mais à l'egard des 3 matières que je vous propose ici ce n'est qu'une

hypothèse. Je crois encore que le createur a pourvu la Terre de la quantité suffisante de l'une et de l'autre de ces deux genres de matières et que leur parfait equilibre est ce qui constitue le Tempéré universel de Globe de la Terre a formé de la figure de ce globe que vous avez de moi, ou vous voiez qu'on doit rencontrer à environ 100 pieds sous terre, par tout ou il n'y a pas des fermentations chaudes ou froides le terme moien fixe et invariable de la temperature du climat plus chaud dans les pais chauds et plus froid dans les pais froids, et que dans les climats temperez en egard à l'elevation du terrain au dessus de la mer et à l'elevation du pole et à la nature du terroir et à son exposition, vous devez rencontrer à cette profondeur le temperé universel, et ce meme terme partout ailleurs en s'approfondissant davantage à mesure qu'on s'approche des climats chauds et des climats froids et cela partout ou il n'y a pas de fermentations chaudes ou froides, jusqu'au centre de la terre, dont j'exclus le pretendu feu central par des raisonemens et par des experiences quil n'y a pas lieu de raporter ici parceque Mr. *Martine* ne le suppose pas.

Je ne le suivrai pas dans ses recherches sur les chaleurs celestes et planetaires par qu'elles me paroissent trop au dessus de la sphere de mon genie pour y pouvoir atteindre, et je me contenterai de dire à cet egard *qua supra nos nihil ad nos* et par raport à tout ce qu'il dit sur la chaleur des divers animaux je le trouve tres curieux, mais n'aiant fait la dessus des experiences je ne puis dire autre chose *qu'amen* et quant à ce qu'il dit des liqueurs qui se gelent, j'avance ici que j'avois fait à Paris deux therm^{es} d'excellent vin de palme de Canarie divisez de 5 en 5 par des soies, et que je les ai tenu plusieurs fois à Paris dans des congelations forcées avec diverses sortes de sels, que ce *non plus ultra* de leur condensation etoit dix degrez sous le Temperé et qu'ils aqueroient ce terme à environ 20 degrez de froid, qu'etant poussez ensuite jusqu'a 29 degrez $^1/_4$ de froid de ma graduation dans la congelation forcée du sel marin et y etant restez au moins deux heures, ils n'ont pas branlé et n'ont point gelé: d'on je conclus qu'ils etoient bien eloignez de geler, car l'eau qui gele a cela de propre qu'elle se condense jusqu'au *non plus ultra* dans le terme de froid de l'eau dans la glace: Ensuite elle s'enfle considerablement avant que de se reffroidir jusqua 14 degrez comme cela s'observe au therm d'eau colorée et d'abord que la glace s'y forme ce qui s'execute c$\overline{oe}$ une etincelle qui allume du bois bien sec tout

le froid qui avoit fait enfler l'eau la quitte et se rend à la circonference où il forme la glace, et celui du therme^e^ d'eau part aussy et va joindre cette glace, d'où je conclus qu'il faut que tout liquide qui doit geler commence à s'enfler préalablement et que longtems auparavant il cesse à se condenser uniformement. Or le vin de Canarie etoit arrivé au *non plus ultra* de sa condensation longtems auparavant et cependant ne s'est point enflé et n'a point gelé, donc l'esprit de vin pur ne sauroit gelé à 100 degrez de froid, car l'eau a cela de propre que depuis l'eau bouillante jusqu'au 50e degrez au dessous ou environ, elle se condense toujours uniformement et suit exactement le therm^e^ d'esprit de vin, ensuite elle commence à resister à la condensation à mesure toujours davantage qu'elle approche du *non plus ultra:* depuis le temperé jusqu'a l'eau dans la glace sa condensation, n'est gueres que de deux degrez, son renflement ensuite en fort considerable, donc l'esprit de vin pour geler doit cesser de se condenser uniformement aumoins soixante au quatre vingt degrez au dessous de ce commencement et resister ensuite encore longtems après avant que de s'enfler et de geler par consequent. Or j'ai eprouvé qu'il se condensait toujours uniformement avec le mercure jusqu'au 30e degré de froid; il est vray que pour l'eclaircissement de cette question il faudroit pousser plus loin l'experience, mais on n'oppose à mon sentiment que de fausses experiences, ainsy j'apelle à des veritables et je croirois gager à coup sur en gageant que qui que ce soit ne fera geler l'esprit de vin carachterisé comme je l'ai dit.

Ce qui fait geler sont des petits dards de froid qui percent et qui enchainent des globules de leau et ces globules ont des germes qui s'attirent les uns et les autres et bien plus fortement lorsqu'ils sont crevez de facon qu'ils se font ainsy tout crever successivement coe une trainée de poudre et il paroit que ces dards de froid ont une tres grande analogie avec ces germes et peut etre meme en tout coe un etui formé par la nature s'ils ne sont pas ces germes. Il faut donc de l'eau pour former de la glace et là ou il n'y a point d'eau le fluide n'en est pas susceptible et peut etre qu'il n'y en a point dans le bon vin de palme, je ne vois point d'ailleurs d'apparence qu'il y en ait dans l'esprit de vin pur qui enflame la poudre et nonobstance tout ce que dit Mr. *Geoffroy*[1]) sur le compte de son Aether qu'il entrait de l'esprit

[1]) *Geoffroy* Etienne François, genannt der Ältere, geb. 13. II. 1672 in Paris, † 6. I. 1731 in Paris, Professor der Pharmacie und Medizin am Collège de France.

de vin, coe si ce qu'il en separe etoit de l'eau, il n'y auroit pour eclaircir ce fait qu'à prendre de l'aether et y remettre la pretendue quantité d'eau extraite et voir s'il allumeroit alors la poudre. je gage quil ne l'allumera point. Donc ce n'est pas de l'eau qu'il aura tiré de l'esprit de vin pur qui enflame la poudre.

Je ne dirai rien sur l'article qui suit à l'egard des metaux si ce n'est que j'ai vue methode laquelle je crois vous avoir communiquée pour en faire des thermometres elle est du moins dans un memoire qu'a de moi le Docteur *Zelmater*. Et pour ce qui concerne le terme du mercure bouillant il y a une erreur de près de 70 degrez dans les observations de Mr. *Muschembrock* et *Fahrenheit* à cet egard, mais n'aiant pas ici ces papiers je n'en dirai pas davantage sur ce sujet. je passe au Chap^e^ suivant sur la generation de la chaleur des animaux. —

Cette matiere est plutost du ressort de Mrs. les Docteurs en Medecine que d'un homme tel que moi, ainsy je me bornerai par dire à cet egard que je conviens avec Mr. *Martine* que la chaleur animale est produite par le frotement des globules du sang dans les vaisseaux capillaires mais qu'il me paroit que ce n'est pas la cause primitifve de la quelle il sagit pour cette chaleur et qu'il faut l'attribuer aux contractions fortes et frequentes du cœur, et ces contractions a des fermentations ou effervescences qui se font dans l'estomach. Cependant je raisonne à peu pres de cela coe un aveugle sur les couleurs et je m'apercois que plus je m'approche de la fin du livre et moins je me trouve en etat d'en pouvoir raisonner. C'est pourquoi je me tairai entierement sur le reste et finis ces remarques par les assurances qu'on ne peut etre plus parfaitement que j'ai l'honneur de me dire Monsieur

Votre tres humble et tres obeissant serviteur

Micheli du Crest.

A Monsieur Baviere l'ainé à Basle. pag. 5.

Reponse au Memoire intitulé: «Maniere de construire une Echelle de Barometre etc.»

L'auteur de ce memoire me paroit penser tres juste lors qu'il prefere ainsy qu'il le fait d'entrée le barometre simple à tous les autres, mais on estime qu'il y a lieu d'ajouter à cela qu'il en faut fixer le calibre interieur à une mesure certaine et commode attendu que le mercure se tient plus haut et de plusieures lignes dans un tuiau d'une

ligne et demi que dans un tuiau de demi ligne, d'où il suit qu'il faut determiner ce calibre à une ligne et demi attendu qu'au dessus il est incommode pour le transport.

2° il faut supposer encore le tuiau d'un calibre egal et parfaitement lisse interieurement pour sa perfection que le mercure dont on le remplira sera parfaitement purifié, le tuiau avant tout, purgé de toute humidité, et ensuite purgé d'air sur le feu, lorsqu'on y aura mis un pied de mercure puis deux pieds, puis ce qu'il faudra pour l'achever.

3° l'on estime qu'il faut en diviser la graduation par pieds, pouces et lignes de Paris, attendu que c'est la mesure la plus universellement recüe et que d'abord qu'on estime devoir s'exprimer en français pour se faire entendre plus commodement des diverses nations qui habitent le nord, il s'ensuit par la meme raison que l'on doit adopter les poids et les mesures de la capitale de la meme langue.

4° au lieu de mettre au dessus de la boule inferieure du tuiau une vis ainsy qu'il est dit à la fin du memoire, il me paroit plus convenable de placer cette vis sous le coude inferieur du barometre et meme sous une espece de genou en forme d'arc mobile pour soutenir ce coude en le faisant ainsy hausser ou baisser avec cette vis.

5° Quoiqu'on puisse tres bien connoitre la question de l'air en fesant mouvoir l'échelle mobile dont le dessein se trouve à la fin du memoire puisque l'on defalque ou l'on ajoute ainsy à la colonne de mercure du barometre l'excez que le chaud ou le froid lui procurent de cote ou d'autre cela neantmoins se peut aussy excuter au moien d'une table, mais peut etre moins commodement, c'est pourquoi pour aider à cette ingenieuse invention j'estime devoir ajouter.

6° Qu'il me paroit qu'il n'y a aucun fonds à faire sur les experiences ces raportées au Memoire de l'academie de Mrs. *Amontons* et *de Reaumur* à moins qu'on ne les ait verifiées soimeme avec soin, avec peine et avec sagacité, car j'y en trouve quantité d'erreurs. On ne sauroit faire une experience plus exacte que celle que j'ai faite à Paris pour connoitre la condensation du mercure depuis le terme de l'eau bouillante le barometre susdit à 27 pouces 9 lignes, et tout le mercure plongé dans l'eau bouillante, car j'ai reiteré deux années apres la meme experience dans le meme instrument et elle s'est trouvée entierement conforme à la precedente au lieu que dans quantité d'autres instrumens où j'ai fait la meme experience j'ai trouvé qu'elle varioit suivant la grandeur de la surface de la boule par raport

à sa contenance quoique toujours le meme dans le meme instrument, qu'ainsy mon temperé tel qu'il est sur mes thermom^es^ à mon dit instrument composé de dix mille grains de mercure et divisé par 10 mille degrez se trouvoit toujours à 137 degrez $^1/_2$, dans les tems qu'aux autres qui avoient la boule beaucoup plus petite et divisez de meme ce terme de condensation etoit à l'un a 135 à l'autre a 134, à l'autre à 133 suivant que la boule diminue en capacité. Or il est aisé de trouver mon dit temperé, en y ajoutant le nombre de degrez qui se trouvent au thermometre de Mr. *Delisle* depuis le terme de l'eau dans la glace jusques audit terme.

Nota bene que mon dit thermometre de Mr. *de lisle* est cõe je le suppose avec une boule de dix mille grains de mercure poids de Paris et celui de Fahrenheit de meme et que j'ai baissé le terme de l'eau bouillante à l'un et à l'autre en vertu des raisons raportées dans mon imprimé, ce qui fait que sur votre planche le temperé de Mr. *de Lisle* n'est qu'à 135.

7° Ce terme du temperé etant le terme mitoien du chaud et du froid de toute la Terre, est le veritable terme où l'on doit fixer le terme moien de la hausse ou de la baisse du mercure du barometre par le chaud ou froid, car l'objection qu'on peut faire que le terme du 13e degré du therm^e^ de Mr. *de Reaumur* est plus maniable, n'est pas une objection, puisqu'il n'est pas necessaire de porter la main aux instrumens pour les observer et qu'au contraire en ce cas il ne faut point les manier du tout et les ternir meme dans de l'eau temperée, dans un lieu temperé, pour les pouvoir alors observer si l'on veut bien exactement; il y a donc lieu suivant mon avis, de fonder le calcul de l'echelle sur le terme du temperé, et d'en diviser la hausse ou baisse, dessus ou dessous, suivant un thermometre de mercure qu'on divisera en autant de degrez qu'on voudra depuis le Temperé au dessus et depuis le Temperé au dessous en placeant zero au dit Temperé et deposant l'instrument à coté du barometre comme il est marqué au memoire.

8° Car si l'on vouloit se servir pour un tel effet d'un bon thermometre d'esprit de vin pur (puisque celui de Mr. *de Reaumur* ne vaut rien pour les degrez de froid) on auroit alors une marche toute differente, qu'on pourroit cependant combiner avec celle du mercure du barometre pour la faire rencontrer dans les excez de chaud et de froid, mais cela causeroit alors assez d'embarras et de peine

pour faire exactement les divisions c'est pourquoi je prefere *ad hoc* les Thermometres de Mercure.

Voila Monsieur ce que j'ai crû devoir vous dire en vous renvoiant le memoire ci joint, vous m'obligerez fort d'ailleurs de m'expliquer si c'est sur le pied de Roy de Paris que sont fondées les observations barometriques de Berlin, car si c'etoit sur le pied de Roy il se trouveroit que le terme moien de ce barometre seroit à 28 pouces 4 lignes et $^1/_2$ et par consequence encore bien plus haut au bord de la mer, d'où il s'ensuivroit que sous l'Equateur il y auroit alors une assez grande difference avec les observations du Perou, pour accuser les observateurs de negligence soit dans l'observation soit dans la comparaison qu'ils ont faite de leurs instrumens. Car ils ont trouvé que le terme moien du barometre y etoit au bord de la mer à peu pres à 28 pouces et supposé encore que par tout ailleurs il etoit de meme. Or c'est ce que j'aurois grande envie de bien s'avoir car si l'observation du barometre est juste à 28 pouces je tiens la terre spherique et non pas applatie du coté des poles, puisque la pesanteur de l'air y seroit egale partout, et par consequent, ce me semble, les lieux d'observation egalement eloignez du centre de la Terre. Or si les lieux d'observation au bord de la mer sont egalement eloignez ou distans du centre de la Terre, soit sous l'equateur soit sous le cercle polaire, il s'ensuit clairement de la que la Terre est parfaitement spherique.

Il ne s'agit donc ici que de justifier ma consequence precedante de la pesanteur de l'air et je le fais en supposant que l'extremité perpendiculaire de toute la hauteur de l'athmosphere de l'air est egalement haute sous le cercle polaire que sous l'equateur, à meme degré de chaleur ou de froid, cette difference devroit exhausser par le chaud la meme colonne plus sous l'equateur qu'au cercle polaire, mais qu'apparemment il y fait par tout dans le haut de cet Athmosphere egalement froid et ainsy la colonne d'air doit suivre exactement la meme curvité dans sa superficie que les eaux de mers dans la leur.

Je n'ignore pas qu'on m'objectera contre cette experience celle du pendule qui prouve, dit on, que la pesanteur n'est pas la meme sous le cercle polaire que sous l'Equateur et quelle est moindre sous l'equateur, mais l'experience du barometre me paroit la contrequarrer vigoureusement. Ainsy c'est du moins un procez fort litigieux qu'une telle affaire car l'academie des sciences de Paris paroit persister dans

la sphericité ainsy qu'il est clair à la page 193 de la connoissance des tems où elle determine la mesure des degrez de l'altitude et cela prouve assez que l'experience du Pendule, non plus que les diverses mensurations du Perou, de Tornea et de France ne l'ont pas convaincüe et par conseq^e que cet argument du barometre est d'un bien grand poids.

Je desirerois au sur plus Monsieur d'avoir un calcul de mille en mille toises de distance jusques à 100 mille toises de Paris qui determinera la difference d'une tangente de niveau sur la mer savoir de combien de pieds s'abaisse au dessous la courbe spherique du niveau naturel à 1000 toises puis à 2000, puis à 3000 et successivement jusqu'à 100,000. Mr. *Picard* a fait ce calcul dans un petit traité qu'il a fait du nivellement, d'autres l'auront fait sans doute de meme, ainsy je vous serais obligé Mr. de la peine de cette copie.

J'attends votre planche et calculs de correction avec impatience je m'imagine que vous enverrez le tout avec les 4 cartes demandées, je prie par celle-ci Mr. *Louvis* de vous rembourser à cet egard.

J'ai l'honneur d'etre tres parfaitement Monsieur votre tres humble et tres obeissent serviteur

Micheli du Crest.

Au chateau d'Arbourg le 24 Oct. 1753.

A Monsieur Huber le fils à Bale

Au chateau d'Arbourg le 7 nov^e 1753.

Monsieur

J'accepte avec bien du plaisir l'honneur de votre correspondance et par conseq^e je vai repondre à tous les articles de votre lettre du 3 de ce mois, mais comme vous n'y dites rien sur le terme du Temperé par moi proposé, comme le point fixe dont il m'a paru convenable que vous parliez pour commencer votre calcul dessus et dessous, le 1er de dilatation, le 2e de condensation, c'est pourquoi j'ai crû devoir tous faire faire ici outre ce que je puis avoir dit quelques nouvelles reflexions sur ce sujet.

En choisissant par vous Monsieur le point de 3 degréz au dessus comme plus approchant de la chaleur de la main, une autre dira que la meme raison doit plutot produire 4, et une autre 5 et une autre 6 et ainsy peut etre encore au dela, au lieu que le temperé etant ou du moins devant etre le milieu commun du chaud et du froid de

toute la Terre c'est la l'unique point appuié de quelque raison que l'on puisse choisir pour accorder tout le Monde sur ce point de commencement.

Reste donc à savoir si le temperé que j'ai determiné du Globe de la Terre sur mon thermometre se trouve le vrai et exacte temperé or pour cela je ne puis dire autre chose si ce n'est qu'il en approche fort et que si j'avois eu les mains libres pour ecrire, il y a longtems que j'aurois reçu de Lion des eclaircissement suffisans pour ce sujet, car il faut savoir qu'il y a eu de la cabale et à Paris et à Lion contre cette et c'est la raison pour laquelle on a marqué dans la connoissance des tems imprimé depuis 1744 que la temperature moienne de Caves de l'observatoire repondoit à 45 degrez de l'ancien therm^{e} de l'observatoire, au lieu de 48 qu'on avoit accusé ci devant, et la cause de cela vient de la jalousie que l'abè *Nolet* avoit concüe contre la reputation de mon thermometre que plusieurs imitent à Paris qui la fait décrier la Temparature d'une niche de ces memes caves que j'avois indiquée pour la regle du Temperé et qui etoit la meme que celle qui avoit il y a peut etre environ 60 ans servi de regle à Mr. *de la Hire* pour regler le Temperé de cet ancien thermometre.

Il est vrai qu'aiant eprouvé moi meme le Temperé de cette niche en 1742 avec cet ancien Thermometre, j'y trouvai cette temperature de 47 degrez au lieu de 48, quelle etoit du tems de Mr. de la Hyre, mais la raison de cela vient evidemment de ce que ce thermometre avoit deposé depuis le 82e degrez au dessus, jusqu'a ce 47 au dessous, la valeur de ce degré en couleur le long des parois du tuiau, or un degré de ce thermometre ne fait qu'a peu pres la valeur d'un demi du mien, et cela a été fait dans l'intervalle, et l'ont voit dans cette partie de tuiau tout trouble, et d'ailleurs l'esprit de vin n'a plus de couleur. Par consequent voila deja un degré demontré de malice par cette reticement, les deux autres le sont par la moienne prise entre les differences de temperature de certaines parties des caves, que je suppose bien varier de l'une et l'autre au moins de 4 degrez et plus de ce thermometre dans de certaines branches qui s'etendent assez loin dans la campagne et qui sont exposés à des eaux qui y tombent et en hyver par conseq^{e} y amenent du froid. Or auparavant on n'avoit point parlé de moienne et on n'avoit tacitement consideré que la niche surditte pour les experiences de Mr. *de la Hire.* Or Mr. *de la Hire* les y avoit toujours faites et moi consequemment à la meme place,

cependant en 1741 j'avois tres bien observé que les autres branches de ces caves varioient fort en temperature quoique la niche en question ne branlat pas ou du moins que sa variation fut presqu'insensible et je n'avois pas pris la peine de desabuser Mr. *de Reaumur* de la fausse croiance où il etoit de meme que bien d'autres sur l'egalité de Temperature des susd^es^ caves mais apparemment qu'en 1744 l'Abé *Nolet* apprit de quelqu'un les observations et crut devoir les reiterez puis en faire grand bruit dans un memoire academique à cet egard afin de decrier ces caves et m'attaquer en suite dans son livre 4 tome experiences de Physique à quoi j'ai repondu convenablement.

Et quant à Lion j'ai soupconné les memes difficultes mais beaucoup plus faciles à surmonter d'ailleurs infiniment plus sûres pour regler le temperé dont il s'agit bien au juste parceque le climat de Lion est un climat parfaitement moien par sa situation à tous egards. Ainsy si vous souhaitez de vous en eclaircir il faudroit consulter le Pere *Beraud* Jesuite sur cet article, il est depositaire de mon therm^e^ et de ceux de l'academie des beaux arts, garde de l'observatoire etc., et personne ne peut etre mieux en etat que lui de juger si mon Temperé est un peu trop haut ou un peu trop bas.

Voila Monsieur ce que j'ai cru devoir ajouter en eclaircissement sur le terme du Temperé.

Je vous serois bien obligé de me communiquer vos reflexions sur les consequences que j'ai tiré forte à la hate de la supposition que le terme moien du barometre sous l'equateur au niveau de la mer et à Stockolm au meme niveau fut egal dans l'un et dans l'autre et à 28 pouces du pied de Roy je vois cette supposition d'ailleurs assez confirmée parceque vous marquez les experiences du barometre de Berlin faites suivant la mesure du pied du Rhin et par consequent leur terme moien se rencontrer etre a 27 pouces 5 lignes du pied de Roy.

A l'egard de la table du niveau de Mr. *Picart* je vous serois bien obligé Monsieur si vous vouliez bien m'en faire une copie manuscrite et me l'envoier avec l'addition du calcul pour 5000 toises, puis pour 10 mille, 20 mille, 30 mille, 40 mille, 50 mille, 60 mille, 70 mille, 80 mille, 90 mille et puis pour 100 mille et que vous vouliez bien Mr. prendre la peine de faire les susd^s^ calculs. C'est afin de pouvoir juger des hauteurs des eaux du Deluge lorsque les sommets des montagnes eloignés à une certaine distance commencerent a paroitre à l'arche de Noë, suivant la relation de Moyse.

Quant a ce qui concerne les diverses questions que vous me faites Mr. sur ma table de correspondance qu'a de moi Mr. *Baviere* je n'y saurois bien repondre sans avoir la dite table n'en aiant pas de double avec moi et ne comprenant pas bien d'ailleurs votre façon de calculer m'etant fait pour mes calculs ma maniere particuliere et n'entendant l'algebre de sorte que lorsqu'il m'a falu sortir de ma d^e^ maniere pour en trouver une autre qui convient au calcul dont je desirois la correction, je n'ai pas pû la trouver et voila pourquoi j'ai marquer ci devant à Mr. *Baviere* ma correspondance des therm^es^ de mercure de *Delisle* et de *Fahrenheit* n'est pas aussy exactement calculée qu'elle devrait etre, je la puis bien faire exacte en comptant par les degrez par ex^e^ de *Fahrenheit* 54 qui repond au zero de mon therm^e^ d'esprit de vin et 73^d^—45′—36″ qui repond à 10 du meme et 92^d^—49′—36″ qui repond à 20 et 102 qui repond à 25, mais non pas de la façon qu'elle est marquée sur ma planche.

Ou le 54 degré de *Fahrenheit* repond bien à zero de mon thermometre d'esprit de vin mais ou je ne suis pas sur que le 60 reponde à 2 degr. 59 dud^e^ thermom^e^ le 70 à 8 degrez, 3 coe je l'ai marqué sur la d^e^ planche et je vous avoüe Monsieur mon insuffisance pour corriger cela en vertu de votre principe, ma regle de progression de division du thermometre de mercure pour l'accorder parfaitement dans sa marche avec mon thermometre d'esprit de vin, ainsy qu'on peut le voir dans la parallele des deux thermom^es^ lequel j'ai donnée à votre bibliotheque, et bonne pour cela, mais n'est pas susceptible de renversement comme si je voulois par exemple faire marcher l'esprit de vin encore formité du mercure et le diviser pour un tel effet de dix en dix sur le thermometre de mercure.

Ainsy je sais bien en vertu de ma d^e^ regle à combien dix degrez de chaud de mon therm^e^ d'esprit de vin sur le temperé repondent à celui de Mercure egalement divisé, s'avoir 12 degrez 24 minutes, de sorte qu'ecrivant dix à la place des 12 deg. 24 et 5 au dessous, soit à 6^d^ 16 sur le temperé soit à 6 deg. 8 de distance au dessous de dix, le Therm^e^ de Mercure suit exactement alors le therm^e^ d'esprit de vin.

Mais si je voulois diviser mon therm^e^ d'esprit de vin de façon qu'il s'accordat de 10 en 10 du therm^e^ de mercure et de cinq en cinq c'est ce dont je n'ai pas pû jusqu'a present trouver la clef, par deffaut de savoir qu'elle doit etre en ce cas la progression. Ainsy

ne le pouvant pas trouver de cette facon de l'un à l'autre, je n'ai pas pu parvenir à trouver jusqu'à present la proportion dont il s'agit par raport à *Delisle* et à *Fahrenheit* dans le nombre que j'ai citer quoique je les trouve bien de distance en distance intermediaire et meme par tous les degrez de mon therm^{e} de mercure egalement divisez. J'estime donc que la chose n'est pas si aisée qu'il semble d'abord à pouvoir trouver; toutefois Mr. je m'en raporte à vos recherches. Quant à la faute que je puis avoir faite à la table susmentionée par l'article de Pondicheri je la corrigerai.

La où j'ai marqué à ce que je crois Mr. sur cette planche, *mon thermometre de Mercure. mon thermometre d'huile de lin.* c'est que je les y suppose peut etre egalement divisez, s'ils sont egalement divisez la ponctuation depuis les points 5 et 10 de mon double echelle demontre le degré qu'ils doivent alors accuser pour se rencontrer avec mon thermometre d'esprit de vin, suivant ce que vous me faites l'honneur de me dire Monsieur, mais comme je ne crois pas que je les aie ainsy divisez, j'estime en ce cas que ce n'est qu'aux nombres et aux divisions qu'il faut avoir egard pour juger de la concordance. Quoi qu'il en soit s'il y a de la faute ou de l'equivoque je la corrigerai, si non j'expliquerai et rendrai raison de la chose quand je verrai la planche.

Peut etre Monsieur que quand vous aurez examiné à votre bibliotheque le parallele susmentioné, vous trouverez vous meme l'explication de cette enigme.

Je vous prie au surplus de faire ces souvenir Mr. *Baviere* au sujet des eclaircissemens que je lui ai demandez touchant le cours de la comete de 1680 et d'agreer ici les assurances de la tres parfaite consideration avec la quelle j'ai l'honneur de me dire

Monsieur . . . . . votre tres . . . . . .

57. Reliefs der Schweiz: *R. Wolf* erwähnt in seiner «Geschichte der Vermessungen» S. 141 einen *Léonard Gaudin*, Topographe et membre de la Société des beaux arts à Genève, der ca. ums Jahr 1820 Reliefs anfertigte. Er soll 1822 in einem eigenen Gebäude im Pâquis in Genf ein 24 auf 19 Fuss haltendes, fast die ganze Schweiz umfassendes Relief zur Ansicht ausgestellt haben, das 1835 um 3600 Fr. an die Sammlung bei den Invaliden in Paris abgetreten wurde. Durch Hrn. *Wäber-Lindt* ist mir kürzlich ein französischer Prospekt in die

Hände gekommen, der zeigt, dass L. Gaudin die Relieffabrikation im grossen Style betrieb, indem er darin 7 Reliefs in grossem, 5 Reliefs in kleinem Massstab dem Publikum zum Ankauf anbot.

Nr. 1. Relief, in welchem der Genfersee die Mitte einnimmt und das sich von Chambéry nach dem Ufer des Neuenburgersees und vom St. Bernhard bis zum Jura erstreckte.

grosses Modell 52 auf 48 Zoll Preis 720 Fr.
kleines » 24 » 19 » » 144 »

Nr. 2. Relief der neuen Simplonstrasse

grosses Modell 27 auf 23 Zoll Preis 144 Fr.
kleines » 12 » 10 » » 60 »

Nr. 3. Relief des St. Gotthard, wo sich das Hospiz, die Quellen des Rheins und alle bemerkenswertesten Berge und Gletscher befinden

grosses Modell 22 auf 17 Zoll Preis 144 Fr.
kleines » 10 » 9 » » 48 »

Nr. 4. Relief des Montblanc und der angrenzenden Aiguilles, des Thales von Chamounix von Servoz bis zum Col de Balme

grosses Modell 24 auf 19 Zoll Preis 192 Fr.
kleines » 12 » $8^1/_2$ » » 72 »

Nr. 5. Ein Relief von Siders bis zum Rhonegletscher und den Gletschern von Grindwald (!), Lauterbrunnen, Jungfrau, das Schreckhorn, die Seen von Thun und Brientz, kurz die centrale Alpenkette

Modell 27 auf 18 Zoll Preis 240 Fr.

Nr. 6. Die ganze Gegend von Nr. 1 vermehrt um die centrale Alpenkette, d. h. das Oberland, Grindwald (!), die Jungfrau, die grossen Aletschgletscher(!), den Simplonübergang, die Gemmi, die kleine und grosse Scheideck, das Lauterbrunnenthal, die Seen von Thun und Brientz bis Meringen (!). den Grimsel. den Brunich (!), die Furka, Sant-Gotthard, Teufelsbrücke, Alcorf(!), der Langensee, Domo-Dossola, Kanton Schwitz, Zug, Luzern bis Zürich und andere Details, bei denen es viel zu lang ginge, sie hier zu beschreiben, in 4 Stücken, wegen der Bequemlichkeit des Transportes

grosses Modell 72 auf 62 Zoll Preis 1450 Fr.
kleines » 26 » 21 » » 370 »

Nr. 7. Das Basrelief, die Katastrophe des Bagnethales im

Wallis mit allen Details dieses traurigen Ereignisses vom 16. Juni 1818 vom Autor an Ort 10 Tage nachher gezeichnet

Modell 52 auf 10 Zoll Preis 120 Fr.

Das letzte erwähnte Relief betrifft den Gletschersturz am Giétrozgletscher mit seinen verheerenden Wirkungen.

L. Gaudin muss die Herstellung von Reliefs sehr intensiv betrieben haben, er verwahrt sich am Schluss gegen die Nachahmungen seiner Produkte, wie sie in Paris, London und Genf auf den Markt gebracht werden. Deshalb tragen alle seine Erzeugnisse eine bestimmte Marke. Die Genauigkeit seiner geographischen Namenschreibung lässt zu wünschen übrig.

Da Wolf in Genf selbst nichts über diese Reliefs von Gaudin erfahren konnte und seine Nachrichten von Kapitän *Penel* in Paris hatte, so ist der im obigen skizzierte fliegende Zeddel vom grössten Werte. Er gehört der schweizerischen Landesbibliothek in Bern.

58. Im Besitze von Hr. Professer *Dr. Lotmar* in Bern befindet sich ein interessantes Instrumentchen. Dasselbe besteht inwendig aus einem Compass mit Sonnenuhr, wobei der gespannte Faden fehlt. Es kommen drei befestigte Kreisteilungen vor.

1) Die äusserste: Die Monate des Jahres.

2) Die zweitäusserste enthält eine Dreiteilung für jeden Monat z. B.

Mai	10.	20.	31.
Juni	10.	20.	30.

3) Die innerste hat zwei Einteilungen.

Juli	I.	II.
August	III.	IV.
Septemb.	V.	VI.
Oktober	VII.	VIII.
Novemb.	IX.	X.
Dezemb.	XI.	XII.
Januar	I.	II.
Februar	III.	IV.
März	V.	VI.
April	VII.	VIII.
Mai	IX.	X.
Juni	XI.	XII.

Ferner finden sich inwendig zwei bewegliche Scheiben und zwar eine grössere Scheibe mit der Einteilung 1—30, also die Monatseinteilung. Die kleinere Scheibe dient zur Darstellung der Mondsphasen im Monat.

Die äussere Seite des Instruments enthält oben eine sogenannte Polar-Sonnenuhr, die untere Seite, wo ein Zeiger fehlt, weist vorerst eine quadratische Platte mit folgenden Zahlen:

5	7	4	12	6	3	11
2	10	0	10	9	0	8
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	(11)	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	0	0	0	0

auf.

Die ersten zwei Reihen enthalten die Stunden des Tages 1—12, die folgenden 5 die Tage des Monats und alles bildet 7 Reihen, entsprechend der Zahl der Tage der Woche. Um alles herum geht der Kranz der Monatsnamen

Januar bis Dezember,

dann folgt hier herum eine zweite Einteilung in 10 20 30 oder 31 und endlich noch eine Gradeinteilung ohne Zahlen.

Die Verwendung des Instruments ist nur zum Teil ersichtlich, in einigem uns noch absolut dunkel. —

Inhalts-Verzeichnis.

	Seite der Sitzungsberichte	Seite der Abhandlungen
Baltzer A., Prof. Dr.,		
Demonstration eines geologischen Profils durch die Schänzli-Moräne	V	
Vorweisung von Mineralien	V	
Altes und Neues von der Insel Rügen	V	
Eiszeiten und Schreibkreide	V	
Brückner E., Prof. Dr.,		
Neuere Probleme der Gletscherforschung	VI	
Die Arbeit Imhofs «Über die Waldgrenze in der Schweiz»	VII	
Droz-Farny A., Professeur à Porrentruy,		
Sur un théorème de Steiner (mit Tafeln)		135
Dutoit E., Dr. med. und Docent,		
Vegetationscharakter des Val de Cogne	VI	
v. Fellenberg E., Dr., *Kissling E.,* Dr. und *Schardt,* Dr.,		
Lötschberg- und Wildstrubeltunnel. Geologische Expertise (mit drei Profilen)		100
Fischer E., Prof. Dr.,		
Über die neuern Untersuchungen betreffend die Befruchtung der Gymnospermen	VII	
Vorweisung von Morchella rimosipes D. C.	VIII	
Über die Bearbeitung der Pilze im grossen Sammelwerk «Die natürlichen Pflanzenfamilien» von Engel und Prantl und der Beiträge zur Kryptogamenflora der Schweiz	VIII	
Graf J. H., Prof. Dr.,		
Notizen zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in der Schweiz		155
Gruner P., Dr., Gymnasiallehrer und Docent,		
Demonstration astronomischer Arbeiten	V	
Über die bevorstehende Sonnenfinsternis und einen beobachteten Sonnenring	VIII	
Guillebeau A., Prof. Dr.,		
Über die Fleckniere der Kälber	VI	
Heffter A., Prof. Dr.,		
Die Peyote, ein Berauschungsmittel der mexikanischen Indianer	VI	

	Seite der Sitzungsberichte	Seite der Abhandlungen
v. Jenner A., Custos, Mitteilung über die Staare	VI	
Kissling, E., Dr., Sekundarlehrer und Docent, Bergbau und Molassekohlen in der westlichen Schweiz	VI	
v. Kostanecki St., Prof. Dr., Demonstration von Chrysin und Tecto-Chrysin .	V	
Marti C., Sekundarlehrer, Über die Gesetze des Wetters	VIII	
Renfer H., Dr., Professor in St. Gallen, Die Definitionen der Bernoullischen Funktion und Untersuchung der Frage, welche von denselben für die Theorie die zutreffendste ist (mit Figuren im Text und 4 Tabellen)		1
Ringwald, Ingenieur, Betriebsleiter des Elektrizitätswerks in Spiez, Über elektrische Kraftgewinnung und Kraftübertragung	VIII	
Schapiro J., Dr. phil., Fortschritt und Rückschritt in biologischer Bedeutung	IX	
Steck Th., Dr. und Conservator, Vorweisung von Litteratur über die Hydrachniden (Wassermilben)	V	
Über die Arbeit von H. Volz «Die Turbellarien in der Gegend von Aarberg»	V	
Über eine entomologische Sammelreise in die grajischen Alpen	IX	
Studer Th., Prof. Dr., Demonstration älterer und neuerer Hundeschädel .	V	
Die Fauna der Hawaï-Inseln	VI	
Vorweisung neuer Präparate	IX	
Über die Hunde aus den Crannoges von Irland .		132
Tschirch A., Prof. Dr., Die Entwicklung der Chinologie im XIX. Jahrhundert	VIII	
Mitgliederverzeichnis pro 31. Dezember 1900 . .	X	
Rechnung der bern. Naturf. Gesellschaft pro 1899 .	XV	
Jahresbericht pro 1899/1900	III	
Inhaltsverzeichnis		174

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

(Fortsetzung von Seite 2 des Umschlags.)

Fascikel IV6: *Fauna helvetica.* Heft 5: Reptilien und Amphibien. Zusammengestellt von Dr. H. Fischer. 39 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel IV6: *Fauna helvetica.* Heft 5δ: Fische. Zusammengestellt von Dr. H. Fischer-Sigwart. Bern 1900. 99 Seiten. Preis Fr. 1.50

Fascikel IV6: *Fauna helvetica.* Heft 6: Mollusken. Zusammengestellt von Prof. Dr. Th. Studer, Dr. G. Amstein und Dr. A. Brot. Preis 60 Cts.

Fascikel IV6: *Fauna helvetica.* Heft 9: Crustacea. Von Dr. J. Heuscher etc. 35 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel V4: *Heraldik und Genealogie.* Bearbeitet von Jean Grellet und Maurice Tripet. Bern 1895. 68 Seiten 8°. Preis Fr. 1.50.

Fascikel V6 a–c: *Architektur, Plastik, Malerei.* Zusammengestellt von Dr. B. Haendcke. Bern 1892. 100 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V6e: *Leibesübungen.* Turnen. Fechten, Reiten, Wassersport etc. Zusammengestellt von Alois Landtwing. 165 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel V9ab: *Landwirthschaft.* Zusammengestellt v. Prof. F. Anderegg u. Dr. E. Anderegg. Bern 1893. Heft 1—3. 258 S. 8° à Fr. 3.—
id. „ 4 „ —.60
id. „ 5 und 6 „ 2.—

Fascikel V9c: *Forstwesen, Jagd und Fischerei.* Forstwesen. Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1894, 160 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V9c: *Forstwesen, Jagd und Fischerei.* Jagd. Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. 77 Seiten 8°. Preis Fr. 1.50

Fascikel V9c: *Forstwesen, Jagd und Fischerei.* Fischerei. Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1898, 65 Seiten 8°. Preis Fr. 1.50

Fascikel V9d: *Schutzbauten.* Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1895. 136 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V9gβ: *Mass und Gewicht.* Bearbeitet von F. Ris, Direktor der eidgen. Eichstätte. Bern 1894. 36 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel V9gγ: *Post- und Telegraphenwesen.*
Postwesen. Zusammengestellt von der Schweizer. Oberpost-Direktion.
Telegraphenwesen. Zusammengestellt von E. Abrezol, Inspektor der Central-Telegraphenverwaltung. Bern 1895. 113 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V9gε: *Bankwesen, Handelsstatistik, Versicherungswesen.* Zusammengestellt von W. Speiser, Basel, Dr. Geering und Dr. J. J. Kummer. Bern 1893. 207 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel V9j: *Alkohol und Alkoholismus.* Zusammengestellt von Otto Lauterburg, Pfarrer in Neuenegg, E. W. Milliet. Direktor der eidgen. Alkoholverwaltung, und Antony Rochat, Pfarrer in Satigny. Bern 1895. 183 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V10eγ: *Die christkatholische Litteratur der Schweiz.* Zusammengestellt v. Dr. F. Lauchert. Bern 1893. 32 Seiten 8°. 60 Cts.

Fascikel V10eα; *Bibliographie der evangelisch-reformirten Kirche in der Schweiz.* Heft 1: Die deutschen Kantone. Zusammengestellt von Dr. G. Finsler. Preis Fr. 2.—

Fascikel V10e: *Die katholisch-theologische und kirchliche Litteratur des Bisthums Basel* vom Jahre 1750 bis zum Jahre 1893. Zusammengestellt von Pfr. Ludwig R. Schmidlin in Biberist.
Heft 1 und 2 à Fr. 3.—

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

Graf, J. H., Prof., Dr. *Einleitung in die Theorie der Gammafunktion und der Euler'schen Integrale.* Fr. 2. —

— — *Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in bernischen Landen* vom Wiederaufblühen der Wissenschaften bis in die neuere Zeit. Heft 1—3. Fr. 7. 20

— — *Leben und Wirken des Physikers und Geodäten Jacques Barthélmy Micheli du Crest* aus Genf, Staatsgefangener des alten Bern 1746—1766. Mit Porträt Micheli's, einer Ansicht seines Gefängnisses in Aarburg und Facsimile seines Panorama der Alpen Fr. 3. —

— — *Das Leben und Wirken des Physikers und Astronomen Joh. Jac. Huber* aus Basel, 1733—1798. Mit dem Bildnisse Huber's und einer Tafel, seine freie Uhrhemmung darstellend . . . . . Fr. 1. —

— — *Professor Dr. Rudolf Wolf, 1816—1893* » 1. —

— — *Professor Ludwig Schläfli, 1814—1895* . . » 1. 20

— — *Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli* . . . . . Fr. 3. —

— — *Die Exhumierung Jakob Steiner's* und Einweihung des Grabdenkmals Ludwig Schläfli's anlässlich des 100. Geburtstages Steiner's. Mit 2 Lichtdrucken Fr. 1. —

— — *Der Mathematiker Jakob Steiner von Utzenstorf.* Ein Lebensbild und zugleich eine Würdigung seiner Leistungen . . . . . Fr. 1. 50

— — *Wann beginnt das XX. Jahrhundert?* Vortrag. Fr. —.50

Graf J. H., Prof. Dr. und **Gubler Ed., Dr.** *Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Funktionen.* 2 Hefte: Die Bessel'schen Funktionen erster und zweiter Art . . . . . à Fr. 4. —

Huber, G., Prof. Dr. *Sternschnuppen, Feuerkugeln, Meteo ite und Meteorschwärme* . . . . Fr. 1.r—

— — *Forschungen auf dem Gebiete der Spektralanalyse* —. 80

— — *Die kleinen Planeten des Asteroidenringes* . —. 60

Kissling, Dr., E. *Die versteinerten Tier- und Pflanzenreste in der Umgebung von Bern.* Exkursionsbüchlein für Studierende . . . . . Fr. 4. —

Baumberger, E. *Ueber die geologischen Verhältnisse am linken Ufer des Bielersees* . . . . Fr. 2. —

Baltzer, A., Prof. *Vom Rande der Wüste.* Populärer Vortrag, gehalten im November 1894 in der Bern. Naturforsch. Gesellschaft. Mit drei Lichtdrucktafeln. . Fr. 1. 50

Fischer, Prof., L., *Zweiter Nachtrag z. Verzeichnis der Gefässpflanzen des Berner-Oberlandes, mit Berücksichtigung der Standortsverhältnisse, der horizontalen und vertikalen Verbreitung* . . . . . Fr. —. 25

Durch jede Buchhandlung zu beziehen.

3 2044 106 306 327